Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

МАТЕМАТИКА

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 I 1955)

В заметке ([1]) мы дали новый метод доказательства теорем существования краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов, основанный на некоторых простых соображениях из функционального анализа. Аналитически он базируется на теоремах единственности (см. леммы в ([1])) обобщенных решений таких задач в классе функций из L_2.

Задача Коши для гиперболических уравнений может быть рассмотрена как частный случай краевой задачи для конечной области, так как для вводимых здесь обобщенных решений сохраняется основное энергетическое неравенство, из которого следует конечность скорости распространения возмущений, описываемых изучаемыми уравнениями. Однако при доказательстве леммы 2 в ([1]) мы существенно использовали факт разрешимости краевой задачи для эллиптического самосопряженного оператора, являющегося составной частью гиперболического оператора. В случае же задачи Коши, как мы здесь покажем (см. лемму 1), можно вместо решения краевой задачи для эллиптического уравнения использовать частное решение этого уравнения типа ньютонова потенциала. Кроме того, мы дадим здесь приближенный метод решений задачи Коши и краевых задач и покажем, как можно исследовать эти задачи, не сводя начальные условия к однородным.

1. Пусть в T-полосе $0 \leqslant t \leqslant l$ пространства $x_1, \ldots, x_n$, t задано гиперболическое уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\ t)\ \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0 u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f, \quad (1)$$

коэффициенты которого и их обобщенные производные (в смысле Соболева) $\partial^3 a_{ij} / \partial x_k \partial t$; $\partial^2 a_i / \partial t^2$; $\partial^2 a / \partial t^2$ и более низкие по t ограничены в любой ограниченной части T. Коэффициенты a_{ij} непрерывны и для любой ограниченной части T

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad (2)$$

где $\alpha = \text{const} > 0$, а ξ_i — любые вещественные числа. Мы докажем однозначную разрешимость уравнения (1), при условиях

$$u\,|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad u_t\,|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad (3)$$

в определенном ниже смысле.

Выделим из T ограниченную область Q, являющуюся конусом с осью, параллельной оси t, и гладкой боковой поверхностью, пространственно ориентированной так, что внешняя нормаль к ней образует с положительным направлением оси t острый угол. Нижнее основание Q лежит в плоскости $t=0$, а верхнее — в плоскости $t=l$. Обозначим через Ω_{t_1} сечение Q плоскостью $t=t_1$, а через Q_{t_1} — часть Q, заключенную между плоскостями $t=0$ и $t=t_1$. Введем в рассмотрение гильбертовы пространства $W_2^l(Q)$ и $W_2^l(\Omega)$, $l=0, 1, 2, \ldots$ (см. [2]), причем $W_2^0=L_2$.

Задачу (1), (3) мы рассмотрим в области Q. Ее можно трактовать как задачу об определении решения операторного уравнения

$$Bu=(f(x,t);\ \varphi_0(x);\ \varphi_1(x)),$$

где B есть оператор, который ставит в соответствие каждой функции $u(x,t)$ из определенного класса $D(B)$ тройку функций $(Lu(x,t);\ u(x,0),\ u_t(x,0))$. Мы определяем сначала оператор B на всех функциях из $W_2^2(Q)$. Множество же значений $R(B)$ оператора B рассмотрим как линеал в гильбертовом пространстве W, являющемся топологическим произведением $L_2(Q)\times W_2^1(\Omega)\times L_2(\Omega)$.

Цель дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы доказать, что оператор B допускает замыкание $\overline{B}$ и уравнение

$$\overline{B}u=(f;\ \varphi_0;\ \varphi_1) \tag{4}$$

однозначно разрешимо для любого элемента $(f;\ \varphi_0;\ \varphi_1)$ из W.

Для этого докажем сначала лемму:

Лемма 1. *В T нет элемента, кроме нулевого, ортогонального ко всем элементам из $R(B)$.*

Итак, дано

$$\int\limits_Q vLu\,dQ+\int\limits_{\Omega_0}\left(\psi_0 u+\sum_{i=1}^{n}\psi_{0x_i}u_{x_i}+\psi_1 u_t\right)\Big|_{t=0}dx=0 \tag{5}$$

для всех $u\in W_2^2(Q)$. Требуется доказать, что $v=\psi_0=\psi_1=0$.

Возьмем сначала только те функции u из $W_2^2(Q)$, для которых $u(x,0)=u_t(x,0)=0$. Для них (5) дает

$$\int\limits_Q vLu\,dQ=0. \tag{6}$$

В силу леммы 2 заметки [1] отсюда следует, что $v=0$.

Мы дадим здесь на примере уравнения

$$Lu\equiv u_{tt}-\Delta u+\sum_{i=1}^{3}a_i u_{x_i}+au=f \tag{1'}$$

несколько иной вывод этого предложения.

Положим v равной нулю вне Q и возьмем вспомогательную функцию

$$\varphi(x,t)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_0}\frac{1}{r(x,y)}e^{-\beta r(x,y)}\int\limits_{l}^{t}v(y,\tau)\,d\tau\,dy,$$

где $\beta = \text{const} > 0$. Так как $v \in L_2(Q)$, то φ имеет обобщенные производные $\varphi_{x_i x_j}$, $\varphi_{x_i x_j t}$, $\varphi_{x_i t}$, квадратично суммируемые по всей полосе T, $\varphi|_{t=l} = 0$ и $\Delta\varphi - \beta^2\varphi = \int_l^t v\,d\tau$. Подставим в (6) выражение v через φ, а вместо u функцию

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} \varphi(x, t_2)\,dt_2, & t \in [a, l]; \\ 0, & t \in [0, a]. \end{cases}$$

Из так полученного равенства можно доказать (подобно тому, как это сделано в заметке (3)), что $\varphi = 0$, а тогда и $v = 0$.

Таким образом, равенство (5) для всех $u \in W_2^2(Q)$ будет иметь вид:

$$\int_{\Omega_0} \left(\psi_0 u + \sum_{i=1}^{3} \psi_{0x_i} u_{x_i} + \psi_1 u_t)\right)\Big|_{t=0} dx = 0,$$

откуда, ввиду достаточного произвола в выборе функций $u(x, 0)$ и $u_t(x, 0)$, легко заключить, что $\psi_0 = \psi_1 = 0$. Лемма 1 доказана.

Замкнем теперь линеал $R(B)$ в пространстве W. Это будет соответствовать замыканию оператора B, так как для любого элемента u из $W_2^2(Q)$ справедливо основное энергетическое неравенство

$$\int_{\Omega_t} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u^2\right)\Big|_{t=t} dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int_{\Omega_0} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u^2\right)\Big|_{t=0} dx + c_1 \int_{Q_t} f^2\,dx\,dt. \qquad (7)$$

Ввиду этого

$$R(\overline{B}) = \overline{R}(B),$$

и так как по доказанному в лемме $R(B)$ было плотно в W, то

$$R(\overline{B}) = W.$$

Тем самым мы доказали разрешимость уравнения (4) для любого элемента $(f; \varphi_0; \varphi_1)$ из W. Единственность решения следует из неравенства (9), которому подчинены все элементы из $D(\overline{B})$.

Решения уравнения (4) являются обобщенными, в смысле введенного в (3) определения, решениями задачи (1), (3).

2. Данный нами метод доказательства существования обобщенных решений задачи Коши и краевых задач позволяет также исследовать зависимость дифференциальных свойств этих решений от гладкости функций, определяющих задачу. Так например, если мы хотим доказать, что $u \in W_2^{k+1}(\Omega_t)$ при всех $t \in [0, l]$, когда $f \in W_2^k(Q)$, $\varphi_0 \in W_2^{k+1}(\Omega_0)$, $\varphi_1 \in W_2^k(\Omega_0)$, а коэффициенты уравнения достаточно гладкие, то надо с самого начала взять пространство $W_2^{k+2}(Q)$ и пространство троек функций $W_2^k(Q) \times W_2^{k+1}(\Omega_0) \times W_2^k(\Omega_0)$ и для них проводить все вышеуказанные рассуждения.

3. Исходя из проведенного здесь исследования, можно предложить следующий способ приближенного решения задачи (1), (3).

Возьмем какой-либо базис $\{\psi_k(x, t)\}$ пространства $W_2^2(Q)$. Учитывая теоремы вложения С. Л. Соболева и структуру оператора B, можно утверждать, что линейные комбинации элементов будут плотны в линеале $R(B)$ пространства W, а следовательно, в силу леммы, и во всем W. Таким образом, суммами вида $B\left(\sum_{k=1}^{m} c_k\psi_k\right)$ можно аппроксимировать любой элемент из W. Приближенное решение уравнения (4) можно получить так: на подпространство пространства W, образованное элементами вида $\sum_{k=1}^{m} c_k B\psi_k$ (m фиксировано, c_k произвольны), надо опустить перпендикуляр из элемента $(f; \varphi_0; \varphi_1)$. Пусть $\sum_{k=1}^{m} c_{k,m}B\psi_k$ есть проекция $(f; \varphi_0; \varphi_1)$ на это подпространство. Тогда функцию $u_m = \sum_{k=1}^{m} c_{k,m}\psi_k$ возьмем за приближенное решение задачи (1), (3). Из леммы следует, что $\sum_{k=1}^{m} c_{k,m}B\psi_k$ сходятся при $m \to \infty$ в норме W к $(f; \varphi_0; \varphi_1)$, а тогда из неравенства (9) следует, что u_m сходятся к точному решению задачи с первыми производными в $L_2(\Omega_t)$. Из неравенства же (7) получим и оценку погрешности $u - u_m$ через

$$\left\| (f; \varphi_0; \varphi_1) - \sum_{k=1}^{m} c_{k,m}B\psi_k \right\|_W.$$

Аналогичный метод можно предложить и для определения приближенных решений краевых задач уравнений параболического и гиперболического типов, надо лишь базисные функции ψ_k подчинить граничным условиям.

Данный здесь и в заметке [1] метод доказательства теорем существования и способ вычисления приближенных решений применимы и для сильно гиперболических систем с симметрической главной частью (см. [3], стр. 273), к которым, в частности, принадлежит система уравнений теории упругости. Аналогично рассматриваются и сильно параболические системы. Для них отличие состоит лишь в том, что рассуждение следует относить к слою $0 \leqslant t \leqslant l$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
20 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ладыженская, ДАН, 97, № 3 (1954). [2] С. Л. Соболев, Некоторые приложения функционального анализа к уравнениям математической физики, 1950. [3] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, 1953.