Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 2

МАТЕМАТИКА

Ю. Г. БОРИСОВИЧ

ОБ ОЦЕНКЕ КОЛИЧЕСТВА КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ФУНКЦИОНАЛОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

1. Задача на условный экстремум слабо непрерывного функционала $f(x)$ на поверхности R гильбертова пространства, которая определяется уравнениями

$$\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0,$$

где $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — некоторые функционалы, приводит к отысканию таких точек $x \in R$, что при некоторой системе вещественных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеет место равенство

$$\Gamma x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Gamma_i x = 0.$$

Здесь через $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ обозначены операторы градиентов функционалов $f(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$. В такой общей постановке задача изучалась в ряде работ Э. С. Цитланадзе (например ([1,2])) и другими авторами. Для случая сферы в гильбертовом пространстве удается провести оценку количества критических точек, используя теорию категории Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана ([3]). При использовании теории категорий существенную роль играет возможность перехода к проективному пространству.

В статье ([4]) М. А. Красносельский предложил новую числовую функцию множеств, названную им родом множества. Эта функция позволила ему, во-первых, получить известные результаты о количестве критических точек четного функционала на сфере без привлечения понятия проективного пространства и, во-вторых, оценить снизу количество критических точек на новой поверхности — гиперболоиде. Эти результаты находят применение и при изучении собственных функций нелинейных операторов ([5]).

Отметим, что в работах ([4,5]) не рассматривался вопрос об особенностях, возникающих при слиянии нескольких критических значений функционала.

В настоящей статье указываются некоторые новые свойства рода множеств. Эти свойства, как нам кажется, представляют самостоятельный интерес. Кроме того, указываемые свойства позволяют для более общих случаев, чем обычно, исследовать континуальные семейства критических точек, возникающие при слиянии критических значений функционалов.

2. Пусть H — вещественное гильбертово пространство. Множество точек $x \in H$, для которых при некоторых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $f_1, \ldots, f_n \in H$ выполняется неравенство

$$|(x - x_0, f_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

образуют окрестность точки x_0 в слабой топологии. Эту окрестность обозначают $U(x_0, \varepsilon, f_1, \ldots, f_n)$.

Как отмечает Э. Хилл ([7]), из того факта, что слабая топология не эквивалентна слабой сходимости в обычном смысле ([8]), следует, что даже сепарабельное гильбертово пространство в слабой топологии не удовлетворяет 1-й аксиоме счетности. Однако для единичного шара T в H имеет место:

Теорема 1. *Если H сепарабельно, то T в слабой топологии удовлетворяет 1-й аксиоме счетности.*

Доказательство этой теоремы основано на теореме ([9]) П. С. Урысона о том, что минимальная мощность базы в каждой точке бикомпактного множества совпадает с минимальной мощностью псевдобазы в этой точке, т. е. системы окрестностей, пересечение которых состоит из одной этой точки. Шар T бикомпактен в слабой топологии (даже без предположения о сепарабельности H).

Из теоремы 1 вытекает, что преобразование в шаре T сепарабельного гильбертова пространства непрерывно в слабой топологии тогда и только тогда, когда оно преобразует каждую слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся.

Мы будем рассматривать только сепарабельное пространство H. Единичный шар, наделенный слабой топологией, будем обозначать через T_c. Окрестности

$$U_m(x_0) = U\left(x_0, \frac{1}{m}, f_1, \ldots, f_m\right) \cap T,$$

где $f_1, \ldots, f_m$ — счетное плотное в H множество, а m — целое положительное число, образуют топологическую базу в T_c. Заметим, что для любой пары замкнутых непересекающихся множеств F_1, $F_2 \subset T_c$ найдется такое m, что $U_m(F_1) \cap V_m(F_2) = 0$, где $U_m(F_i) = \sum_{x \in F_i} U_m(x)$ $(i = 1, 2)$.

3. Пусть A — инволютивное $(A^2x = x)$ непрерывное преобразование T_c на себя.

Определение 1. Замкнутое множество $E \subset T_c$ имеет род $r_A E = 1$, если ни одна его связная компонента не содержит пары точек x, Ax.

Определение 2. Множество $E \subset T_c$ (не обязательно замкнутое) имеет род $r_A E = n$, если оно содержится в n и не содержится в $n-1$ замкнутых множествах рода 1.

Понятие рода, естественно, определяется только для тех множеств, которые не содержат неподвижных точек инволюции A. Введенное для случая слабой топологии понятие рода обладает свойствами, указанными М. А. Красносельским ([4]), а также рядом свойств категории.

Теорема 2. *Если $E \subset T_c$ замкнуто, то $r_A E \leqslant \dim E + 1$ для любой инволюции A, где $\dim E$ — размерность ([10]) бикомпактного множества в слабой топологии.*

Для случая $E = S^n$ конечномерной сферы и для действующей на ней инволюции имеем: $r_A S^n \leqslant n + 1$.

Теорема 3. *Если $E \subset T_c$ и $r_A E = n$, то существует такое m, что $r_A U_m(E) = r_A E$.*

Следуя М. А. Красносельскому ([4]), назовем преобразование B, действующее в T_c, допустимым, если $AB = BA$.

Теорема 4. *Если B — допустимое преобразование, непрерывное в T_c, то $r_A(BE) \geqslant r_A E$.*

Пусть $[E_i]$ обозначает класс всех компактных и замкнутых в слабой топологии множеств на поверхности R, определенной выше, для которых $r_A E \geqslant i$ относительно некоторой, определенной на R, инволюции A. Этот класс называют топологическим классом. Ему соответствует критическое значение c_i слабо непрерывного функционала $f(x)$

$$c_i = \sup_{E \in [E_i]} [\inf_{x \in E} f(x)].$$

При различных дополнительных предположениях можно показать, что на R есть критическая точка x функционала $f(x)$, в которой $f(x) = c_i$.

4. Свойства, аналогичные приведенным выше, существуют и в теории рода в сильной топологии в H, если ограничиться компактными замкнутыми множествами. Обе теории рода находят применение в вариационной теории при оценке количества критических точек.

Теорема 5. *Если L — линейный самосопряженный оператор в H, имеющий n положительных собственных значений (с учетом их кратности), то поверхность $(Lx, x) = c > 0$ имеет род не меньше n относительно инволюции $Ax = -x$.*

Теорема 6. *Если Γ — оператор градиента слабо непрерывного, четного, положительного, равномерно дифференцируемого на каждом шаре функционала $f(x)$, $f(x) = 0$ и $\Gamma x = 0$ только при $x = 0$, причем $f(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to \infty$, $(Lx, x) = c > 0$, то на каждой такой поверхности $(Lx, x) = c$ существуют не менее $2n$ критических точек x_i, в которых*

$$\Gamma x_i - \lambda_i L x_i = 0.$$

Если $p+1$ критических значений совпадают, то появляется замкнутое континуальное множество критических точек рода $\geqslant p+1$.

Напомним, что функционал $f(x)$, имеющий градиент Γ, называют равномерно дифференцируемым на множестве T, если $\frac{1}{\|h\|}[f(x+h) - f(x) - (\Gamma x, h)]$ при $\|h\| \to 0$ стремится к нулю равномерно относительно $x \in T$.

Рассмотрим теперь оператор L вида $Lx = x_1 - Gx_2$, где $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$, H_1 и H_2 — ортогональные подпространства в H такие, что $H_1 \oplus H_2 = H$; G — оператор в H_2, $G^* = G$ и $(Gx_2, x_2) \geqslant 0$, причем $\dim H_1$ конечна. Функционал $f(x)$ будем предполагать периодическим относительно инволюции $Ix = -x_1' + x_2'$, где $x_1' \in H_1'$, $x_2' \in H_2'$, $H_1' \oplus H_2' = H$, $H_1 \subset H_1'$ и $IL = LI$. От функционала $f(x)$ не будем требовать положительности.

Теорема 7. *Если Γ — перестановочный с I оператор градиента слабо непрерывного функционала $f(x)$, равномерно дифференцируемого на каждом шаре, $|(\Gamma x, x)| > 0$ при $(Lx, x) > c$, причем $f(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to \infty$, $(Lx, x) = c > 0$, то на каждой такой поверхности $(Lx, x) = c > 0$ существует не менее $2 \dim H_1$ собственных элементов x_i таких, что $L^{-1}\Gamma x_i - \lambda_i x_i = 0$. Если $p+1$ критических значений совпадают, то появляется замкнутое континуальное множество собственных элементов рода $\geqslant p+1$.*

Теоремы 6 и 7 являются усилением теоремы 9 М. А. Красносельского и А. И. Поволоцкого ([5]).

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
6 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. С. Цитланадзе, ДАН, 53, 4, 311 (1946). [2] Э. С. Цитланадзе, Тр. Московск. матем. общ., 2, 235 (1953). [3] Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, Усп. матем. наук, 2, 1, 166 (1947). [4] М. А. Красносельский, Усп. матем. наук, 7, 2, 157 (1952). [5] М. А. Красносельский, А. И. Поволоцкий, ДАН, 91, 1, 19 (1953). [6] Л. А. Люстерник, Изв. АН СССР, сер. матем., 3, 257 (1939). [7] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, 1951, стр. 40. [8] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, 1951, стр. 200. [9] П. С. Урысон, Тр. по топологии и другим областям математики, 2, 1951, стр. 889. [10] П. С. Александров, Комбинаторная топология, 1947, стр. 63.