Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и С. Г. КРЕЙН

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 XII 1954)

Рассматривая теоремы единственности и нелокальные теоремы существования для систем

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

авторы заметили, что многие из них являются следствиями одного и того же простого геометрического соображения. Сюда относятся теоремы единственности типа теоремы Осгуда — Тамаркина — Тонелли, а также различные утверждения А. Винтнера о существовании решений, определенных на полубесконечном интервале. Попутно был получен ответ на один вопрос, поставленный Н. П. Еругиным.

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{2}$$

где $f(x, t)$ $(x \in E, -\infty < t < \infty)$ — непрерывный оператор со значениями в банаховом пространстве E. Обычные рассуждения приводят к локальной теореме существования.

Теорема 1. *Пусть оператор $f(x, t)$ представим в виде $f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)$, где $f_1(x, t)$ вполне непрерывен, а $f_2(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица $\| f_2(x, t) - f_2(y, t) \| \leqslant K(t) \| x - y \|$ с суммируемой на каждом сегменте $K(t)$.*

Тогда можно указать $h_0 > 0$ такое, что существует решение $x = x(t)$ уравнения (2), определенное при $t_0 - h_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h_0$ и удовлетворяющее заданному начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Нас будут интересовать условия, при которых все решения уравнения (2) могут быть продолжены на полубесконечный интервал $[t_0, \infty)$. Всюду предполагается, что $\sup_{\| x \| < a;\ | t | \leqslant a} \| f(x, t) \| < \infty$ при любом $a > 0$.

2. Ниже через $L(u)$, $\psi(t)$ обозначаются неотрицательные функции, первая из которых непрерывна, а вторая интегрируема на каждом конечном сегменте.

Пусть $\{\Phi_i(x)\}_{i=1}^m$ — неотрицательные функционалы, определенные на E. Будем предполагать, что эти функционалы непрерывно дифференцируемы по Фреше, т. е. что их градиенты Γ_i являются непрерывными на E операторами. Пусть $\Phi(x) = \max_i \Phi_i(x)$. Через $j(x)$ будем обозначать любой из индексов i, для которых $\Phi_i(x) = \Phi(x)$ при заданном x.

Основную роль в наших рассуждениях играет следующая лемма.

Лемма. *Пусть правая часть уравнения* (2) *удовлетворяет условию* *

$$(\Gamma_{j(x)}x,\ f(x,\ t) \leqslant L\ [\Phi(x)]\ \psi(t). \tag{3}$$

Пусть $x(t)$ *— решение уравнения* (2), *определенное при* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,dt \geqslant \int_{\Phi[x(t_1)]}^{\Phi[x(t_2)]} \frac{du}{L(u)}. \tag{4}$$

Функционал $\Phi(x)$ назовем возрастающим, если $\Phi(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$.

Из приведенной выше леммы почти непосредственно следует теорема 2.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (3), *в котором* $\Phi(x)$ — *возрастающий функционал. Пусть при любом* $A > 0$

$$\int_A^{\infty} \frac{du}{L(u)} = \infty. \tag{5}$$

Тогда все решения уравнения (2) *продолжимы на полубесконечный интервал.*

Более грубым, но простым утверждением является теорема 3.

Теорема 3. *Пусть*

$$\|f(x,\ t)\| \leqslant L\ [\Psi(x)]\ \psi(t), \tag{6}$$

где $L(u)$ *удовлетворяет условию* (5), *а* $\Psi(x)$ — *возрастающий функционал, удовлетворяющий на всем* E *условию Липшица.*

Тогда все решения уравнения (2) *продолжимы на полубесконечный интервал.*

3. Теоремы 2 и 3 применимы к исследованию системы (1), рассматриваемой как уравнение (2), определенное в n-мерном евклидовом пространстве. Выбирая в качестве $\Phi(x)$ (или $\Psi(x)$) различные функции n переменных, можно получить различные нелокальные теоремы существования для системы (1). В этих теоремах условие (3) (или (6)) заменяется при этом неравенствами, имеющими более конкретный вид. В частности, в качестве $\Phi(x)$ (или $\Psi(x)$) удобно выбирать различные банаховы нормы. Некоторые из получаемых на указанном пути нелокальных теорем существования были ранее другим методом получены А. Винтнером (1) (см. также (2), стр. 16—19). Для примера укажем, какую форму принимает условие (3) при некоторых $\Phi(x)$.

Если $\Phi(x) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = r$, то условие (3) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \leqslant rL(r)\,\psi(t).$$

Если $\Phi(x) = \max_i |x_i|$, то условие (3) выполняется, если

$$f_j(x_1, \ldots, x_n, t)\ \operatorname{sign} x_j \leqslant L\ (\max_i |x_i|)\,\psi(t) \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Если $\Phi(x) = |x_1| + \ldots + |x_n|$, то условие (3) записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n, t)\ \operatorname{sign} x_i \leqslant L\ (|x_1| + \ldots + |x_n|)\,\psi(t).$$

4. Если функции $\Phi^*(x)$, $\Phi^{**}(x)$ различны, то можно построить систему (1), для которой неограниченная продолжимость решений

* Символом $(l,\ x)$ обозначается значение линейного функционала l на элементе x.

устанавливается при помощи теоремы 2 с использованием функций $\Phi^*(x)$ и не может быть установлена при использовании функции $\Phi^{**}(x)$.

Пусть, например, в плоскости $x=\{\xi, \eta\}$ рассматриваются функции $\Phi^*(x)=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}$ $(a>b)$, $\Phi^{**}(x)=\xi^2+\eta^2$. Через Γ_n обозначим эллипсы с уравнениями $\Phi^*(x)=n^2$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим систему

$$\frac{d\xi}{dt}=P(\xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt}=Q(\xi, \eta), \tag{7}$$

которая в полярных координатах имеет вид

$$\frac{dr}{dt}=K(r, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt}=0, \tag{8}$$

где $K(r, \varphi)$ — непрерывная периодическая по φ функция, удовлетворяющая условиям: $K(0, \varphi)\equiv 0$; $K(r, \varphi)>0$ при $r>0$. $K(r, \varphi)=r^2$, если точка $\{r, \varphi\}$ лежит на одном из эллипсов Γ_{3k} $(k=1, 2, \ldots)$; $K(r, \varphi)=1$, если точка $\{r, \varphi\}$ лежит между какой-либо парой эллипсов Γ_{3k+1}, Γ_{3k+2} $(k=1, 2, \ldots)$.

Пользуясь теоремой 2, в которой $\Phi(x)=\Phi^*(x)$, можно показать, что все решения системы (7) определены при $-\infty<t<\infty$. Для установления этого факта нельзя воспользоваться теоремой 2 с $\Phi(x)=\Phi^{**}(x)$. Действительно, из неравенства (3), в котором $\Gamma_{f(x)}$ — градиент функционала $\Phi^{**}(x)$ и $\psi(t)\equiv 1$, следует, что $L(u)\geqslant u^{1/2}$ при $u\geqslant\left(\frac{3ab}{a-b}\right)^2$, т. е. следует, что условие (5) не выполняется.

Н. П. Еругин ([3], стр. 229) высказал предположение о том, что условия

$$|P(\xi, \eta)|\leqslant L(r), \quad |Q(\xi, \eta)|\leqslant L(r); \tag{9}$$

$$\int_A^\infty \frac{du}{L(u)}=\infty \tag{10}$$

необходимы для того, чтобы все неограниченные решения системы (7) можно было продолжить на интервал $(-\infty, \infty)$. Это предположение неверно, как показывает пример системы (8). Для этой системы из (9) следует, что $L(u)\geqslant u^2/2-a$, т. е. что (10) не выполняется.

5. Теоремы 2 и 3 могут быть применены и к доказательству нелокальных теорем существования решений у интегро-дифференциальных уравнений. Например, объединение теорем 1, 3 и одного результата из ([4]) приводит к существованию определенных при $-\infty<t<\infty$, $0\leqslant u\leqslant 1$ решений уравнения

$$\frac{dx(u, t)}{dt}=\int_0^1 K[u, v, x(v, t)]\,dv, \tag{11}$$

если $K(u, v, x)$ $(0\leqslant u, v\leqslant 1, -\infty<x<\infty)$ непрерывно по x и удовлетворяет условию $|K(u, v, x)|\leqslant a+b|x|$. Доказательство основано на рассмотрении уравнения (11) как уравнения вида (2) в $L^2\{[0, 1]\}$.

6. Сформулированная выше лемма приводит и к общей теореме о единственности решений.

Теорема 4. *Пусть $x=x_1(t)$, $x=x_2(t)$ — два решения уравнения (2), удовлетворяющие одному и тому же начальному условию. Пусть* $\Phi(x)=\max_i|\Phi_i(x)|$, $\Phi(0)=0$ *и*

$$(\Gamma_{f(x_1-x_2)}(x_1-x_2), f(x_1, t)-f(x_2, t))\leqslant L[\Phi(x_1-x_2)]\psi(t), \tag{12}$$

причем при любом $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{du}{L(u)} = \infty. \tag{13}$$

Тогда $x_1(t) \equiv x_2(t)$.

Более грубые (но простые) условия единственности решений дает теорема 5.

Теорема 5. *Пусть* $x = x_1(t)$, $x = x_2(t)$ — *два решения уравнения* (2), *удовлетворяющие одному и тому же начальному условию. Пусть* $\Psi(x)$, $\Psi(0) = 0$, — *функционал, удовлетворяющий в окрестности нуля пространства* E *условию Липшица. Пусть, наконец, при* $x_1 - x_2$ *из этой окрестности выполняется неравенство*

$$\| f(x_1, t) - f(x_2, t) \| \leqslant L[\Psi(x_1 - x_2)]\,\psi(t), \tag{14}$$

причем $L(u)$ *удовлетворяет условию* (13).

Тогда $x_1(t) \equiv x_2(t)$.

7. В случае одного обыкновенного дифференциального уравнения (E — вещественная прямая, $\Phi(x) = |x|$) теорема 4 фактически совпадает с теоремой Тонелли ([5]), являющейся обобщением теоремы Осгуда — Тамаркина ([6],[7]) (см. ([8]), стр. 90; ([9]), стр. 49). Для системы (1) из теорем 4 и 5 можно получить различные условия единственности решений, выбирая различные функции $\Phi(x)$ (или $\Psi(x)$). Если, в частности, положить $\Phi(x) = \max\limits_i |x_i|$, то мы придем к условиям Мюллера ([10]) (см. также ([11])). Укажем еще два примера.

Если $\Phi(x) = A_1^2 x_1^2 + \ldots + A_n^2 x_n^2$, то условие (12) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^2 (x_i - y_i)[f_i(x_1, \ldots, x_n, t) - f_i(y_1, \ldots, y_n, t)] \leqslant$$

$$\leqslant L\left[\sum_{i=1}^{n} A_i^2 (x_i - y_i)^2\right]\psi(t).$$

Если $\Phi(x) = |x_1| + \ldots + |x_n|$, то условие (12) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} [f_i(x_1, \ldots, x_n, t) - f_i(y_1, \ldots, y_n, t)]\,\mathrm{sign}\,(x_i - y_i) \leqslant$$

$$\leqslant L\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right]\psi(t).$$

Теоремы 4 и 5 применимы к доказательству единственности решений и для интегро-дифференциальных и других уравнений.

Воронежский государственный университет

Поступило 3 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Wintner, Am. J. Math., **67**, № 2 (1945); **68**, № 1 (1946). [2] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., 1949. [3] Н. П. Еругин, Прикладн. матем. и мех., **15**, № 2, 227 (1951). [4] М. А. Красносельский, Л. А. Ладыженский, Тр. Моск. матем. общ., **3**, 307 (1954). [5] L. Tonelli, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 1, 272 (1925). [6] W. F. Osgood, Monatsh. f. Math. u. Phys., **9**, 331 (1898). [7] J. Tamarkin, Math. Zs., **16**, 207 (1923). [8] Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, **2**, ИЛ, 1954. [9] И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. 4, М.—Л., 1952. [10] M. Müller, Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math. Nat. Kl., 9 (1927). [11] М. Ф. Бокштейн, Уч. зап. МГУ, **15**, 3 (1939).