Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

МАТЕМАТИКА

А. М. ИЛЬИН

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА НЕКОТОРОМ МНОЖЕСТВЕ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК ОБЛАСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 31 XII 1954)

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv a_{11}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y)\frac{\partial u}{\partial x\,\partial y} + a_{22}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+ b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = h(x, y). \qquad (1)$$

В ограниченной замкнутой области $\overline{D}$

$$c(x, y) \leqslant 0, \quad a_{11}(x, y) + a_{22}(x, y) > 0, \quad a_{11}(x, y)a_{22}(x, y) - a_{12}^2(x, y) \geqslant 0,$$

причем последнее равенство достигается на множестве $M \subset \overline{D}$. Множество M состоит из конечного числа внутренних точек Q_i и конечного числа кривых l_i, имеющих ограниченную кривизну и пересекающихся друг с другом и с границей D в конечном числе точек. Границу области D обозначим Γ. Коэффициенты $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$, $c(x, y)$, $h(x, y)$ имеют в $\overline{D}$ непрерывные производные до четвертого, а $a_{11}(x, y)$, $a_{12}(x, y)$, $a_{22}(x, y)$ — до пятого порядка включительно. Точки $P \in \Gamma \setminus M$ регулярны.

Будем искать решение $u(x, y)$ уравнения (1) в области D, принимающее на Γ значения заданной непрерывной функции φ. Мы получим это решение как предел при $\varepsilon \to 0$ функций $u_\varepsilon(x, y)$, удовлетворяющих уравнению

$$L_\varepsilon(u_\varepsilon) \equiv [a_{11}(x, y) + \gamma_\varepsilon(x, y)]\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x\,\partial y} +$$

$$+ [a_{22}(x, y) + \gamma_\varepsilon(x, y)]\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} + b_1(x, y)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} +$$

$$+ c(x, y)u_\varepsilon = h(x, y) \qquad (2)$$

и принимающих на Γ значения функции φ. Гладкие функции $\gamma_\varepsilon(x, y)$ таковы, что $0 \leqslant \gamma_\varepsilon(x, y) \leqslant \varepsilon$, причем в некоторой окрестности каждой точки $P \in M \setminus \Gamma$ $\gamma_\varepsilon(x, y) \equiv \varepsilon$ для всех ε, а в некоторой окрестности каждой точки $P \in \Gamma \setminus M$ $\gamma_\varepsilon(x, y) \equiv 0$ для $\varepsilon < \varepsilon_0(P)$. Уравнение (2) — эллиптическое в $\overline{D}$, и поэтому $u_\varepsilon(x, y)$ существуют ([2]) и имеют производные пятого порядка ([3]).

Для существования $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,y) = u(x,y)$, удовлетворяющего уравнению (1) и граничным условиям, достаточно доказать:

а) $u_\varepsilon(x,y)$ вместе с производными до третьего порядка включительно равномерно по ε ограничены внутри D. (Выражение «равномерно внутри области G» здесь и в дальнейшем означает: равномерно в любой замкнутой области $F \in G$.) Тогда подпоследовательность $u_\varepsilon(x,y)$ вместе с производными до второго порядка включительно равномерно сходится внутри D.

б) Предельные значения полученной таким образом функции $u(x,y)$ на Γ совпадают со значениями функции φ.

Равномерная ограниченность $u_\varepsilon(x,y)$ следует из принципа максимума: $|u_\varepsilon(x,y)| \leqslant \max\limits_{P\in\Gamma} |\varphi(P)|$.

Для доказательства предложения а) мы воспользуемся оценками С. Н. Бернштейна ([1],[2]). Эти оценки дают равномерную ограниченность производных от $u_\varepsilon(x,y)$ до третьего порядка включительно внутри $D \setminus M$. Оценку этих производных в некоторой окрестности M будем проводить в два приема. Предположим, что существует лишь конечное число точек на кривых l_i, где направление кривой l_i совпадает с характеристическим направлением уравнения (1). Назовем эти точки, а также точки пересечения кривых l_i друг с другом «критическими». Оценим сначала производные от $u_\varepsilon(x,y)$ до третьего порядка в окрестности кусков дуг l_i, концы которых лежат вблизи «критических» точек, а затем и внутри окрестностей «критических» точек и точек Q_i.

Лемма. *Пусть $P_0 \in M \setminus \Gamma$. Тогда существует окрестность точки P_0 $\omega(P_0)$, не зависящая от ε и такая, что из равномерной ограниченности производных от $u_\varepsilon(x,y)$ до третьего порядка на границе $\omega(P_0)$ следует их равномерная ограниченность внутри $\omega(P_0)$.*

Без ограничения общности можно считать P_0 началом координат и $a_{11}(0,0) > 0$. Можно также считать, что уравнение (2) имеет вид

$$L_\varepsilon(u_\varepsilon) \equiv \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + f^\varepsilon(x,y)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + c(x,y)\,u_\varepsilon = h(x,y), \tag{3}$$

где $f^\varepsilon(x,y) > 0$ при $\varepsilon > 0$.

Действительно, уравнение (2) можно привести к виду (3) в некоторой окрестности начала координат, не зависящей от ε, при помощи преобразования координат

$$\xi = x; \quad \eta = \eta(x,y), \tag{4}$$

где $\eta(x,y)$ — решение уравнения

$$[a_{11}(x,y) + \varepsilon]\frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12}(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

при условии $\varphi(0,y) \equiv y$. При этом все коэффициенты уравнения (3) имеют непрерывные производные третьего порядка и

$$f^\varepsilon(x,y) \equiv \left[\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}(a_{11}+\varepsilon)} + \varepsilon\frac{a_{11}+a_{22}+\varepsilon}{a_{11}+\varepsilon}\right]\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

Рассмотрим выражения:

$$Z_1 = (x^2+\delta)\left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right)^2\right]+x^2,$$

$$Z_2 = (x^2+\delta)\left[\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}\right)^2\right]+x^2,$$

$$Z_3 = (x^2+\delta)\left[\left(\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^2\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial y^3}\right)^2\right]+x^2.$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что в некоторой окрестности начала координат $L_\varepsilon Z_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, причем $\delta > 0$ не зависит от ε. Это можно установить, используя равенства, полученные последовательным дифференцированием уравнения (3), а также неравенство

$$\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial y}\right)^2 \leqslant Rf^\varepsilon,$$

где константа R не зависит от ε.

Доказанная лемма дает равномерную ограниченность производных третьего порядка от $u_\varepsilon(x, y)$ в окрестностях Q_i.

Пусть S_i — куски кривых l_i, свободные от «критических» точек, концы которых лежат внутри окрестностей «критических» точек, определяемых из леммы. Приведем уравнение (2) преобразованием, аналогичным преобразованию (4), к виду (3) вблизи S_i. Пусть $\overline{S_i}$ — образ S_i при этом преобразовании. (Можно предположить, что на S_i $a_{11} > 0$. В противном случае S_i можно дополнительно разбить на конечное число частей, в каждой из которых $a_{11} > 0$ или $a_{22} > 0$. Тогда, добавив новые «критические» точки, можно проводить дальнейшие рассуждения без изменений.) Так как направление $\overline{S_i}$ нигде не совпадает с характеристическим направлением уравнения (3) (т. е. с горизонтальным направлением), то $\overline{S_i}$ можно представить как график функции $x = \psi(y)$. Без ограничения общности можно предположить, что ординаты концов $\overline{S_i}$ равны $\pm d$. Тогда, как и в лемме, можно доказать, что

$$L_\varepsilon(Z_4) \equiv L_\varepsilon\{[(x-\psi(y))^2+\delta](d_1^2-y^2)^2(u_x^2+u_y^2)+u^2+x^2\} > 0 \quad (5)$$

в области $|x-\psi(y)| \leqslant \beta$; $|y| \leqslant d_1$ $(d_1 > d)$, где β, δ и $d_1 - d$ достаточно малы и не зависят от ε. Так как Z_4 ограничено на границе $|x-\psi(y)| = \beta$ этой области равномерно по ε (оценки Бернштейна), то u_x и u_y равномерно ограничены внутри области $|x-\psi(y)| \leqslant \beta$, $|y| \leqslant d$. Аналогично доказывается равномерная ограниченность вблизи S_i вторых и третьих производных $u_\varepsilon(x, y)$.

Производные до третьего порядка $u_\varepsilon(x, y)$ равномерно ограничены на границе окрестностей $\omega(P_j)$ «критических» точек P_j. Действительно, для точек границы $\omega(P_j)$, близких к S_i, это следует из (5), а для остальных точек — из оценок Бернштейна. Следовательно, согласно лемме, производные до третьего порядка $u_\varepsilon(x, y)$ равномерно ограничены и внутри $\omega(P_j)$, и предложение а) доказано.

Предложение б) очевидно для $\Gamma \setminus M$, так как вблизи $P_0 \in \Gamma \setminus M$ уравнения (1) и (2) совпадают, и для доказательства можно использовать те же барьеры, что и для эллиптического уравнения [1]. Барьеры в точках $P_0 \in \Gamma \cap M$ легко можно построить в том случае, если этих точек можно извне коснуться кругом, причем касательная в точке

соприкосновения не совпадает с характеристическим направлением (условие А). Преобразование (4) при $\varepsilon = 0$ приводит уравнение (2) к уравнению (3) при $\varepsilon = 0$ вблизи P_0 (считается, что P_0 — начало координат и $a_{11}(0,0) > 0$). Пусть k — угловой коэффициент касательной к окружности в начале координат с осью y. Тогда функция $v(x,y) = |x - ky + Cy^2|^{1/3}$ будет искомым барьером, если C достаточно велико по модулю и $|x - ky + Cy^2| > 0$ в окрестности начала координат, принадлежащей D, так как при этом $L(v) < 0$ в этой окрестности.

Единственность решения Дирихле доказывается обычным путем при помощи принципа максимума. Итак, доказана следующая теорема:

Теорема. *Задача Дирихле для уравнения* (1) *в области D имеет единственное решение, если кривые l_i, где это уравнение вырождается в параболическое, имеют лишь конечное число точек, в которых направление кривой l_i совпадает с характеристическим направлением уравнения* (1), *и для точек границы $P \in \Gamma \cap M$ выполнено условие* А.

Замечания. 1. Теорема легко переносится на случай, когда существует лишь конечное число предельных точек для множества «критических» точек.

2. Если в уравнении (1) $a_{11}(x,y) \equiv 1$, $a_{12}(x,y) \equiv 0$, то теорема верна и в том случае, когда некоторые из кривых l_i являются характеристиками уравнения (1) и лежат внутри D, причем $|b_2(x,y)| > b_0 > 0$ вдоль этих кривых. Для доказательства достаточно сделать замену $u = e^{-\alpha y} w$ (где α одного знака с $b_2(x,y)$ и достаточно велико по абсолютной величине) и показать, что $L_\varepsilon(w_x^2 + w_y^2 + e^{\beta y}) > 0$ в окрестности кривой l_i при достаточно большом β, и аналогично оценить производные второго и третьего порядков.

3. Пусть в случае n переменных уравнение имеет вид:

$$f(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1 \ldots x_n)u = h(x_1 \ldots x_n). \tag{6}$$

В области D $c \leqslant 0$, $f \geqslant 0$, причем $f = 0$ на гладкой гиперповерхности меньшего числа измерений $x_2 = F(x_1, x_3, \ldots, x_n)$. Квадратичная форма $\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}(x_1 \ldots x_n)\alpha_i\alpha_j > 0$ при $\sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 > 0$. Точки границы $P \in \Gamma \setminus M$ регулярны. До точек $P \in \Gamma \cap M$ можно извне коснуться шаром, причем направление радиуса шара, проведенного в точку соприкосновения, не совпадает с направлением оси x_1. Тогда задача Дирихле для уравнения (6) в области D имеет единственное решение, если коэффициенты уравнения (6) достаточно гладкие.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю О. А. Олейник за постановку задачи и руководство.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Олейник, Матем. сборн., 24, 1, 3 (1949). [2] Б. А. Барабанов, Диссертация, Саратовский университет, 1939. [3] А. В. Погорелов, Изгибание выпуклых поверхностей, 1951. [4] С. Н. Бернштейн, C. R., 151, 636 (1910).