Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

МАТЕМАТИКА

Р. Л. ДОБРУШИН

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 I 1955)

Условиям асимптотической нормальности сумм $\zeta_n = \xi_{1n} + \ldots + \xi_{nn}$ ограниченных случайных слагаемых ξ_{ij}, связанных в неоднородную цепь Маркова, посвящены работы А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна, Н. А. Сапогова, Ю. В. Линника. История вопроса выражается короче всего следующей схемой:

Условия на переходные вероятности	Условия на число состояний		
	два состояния	конечное число состояний	ограниченная область евклидова пространства
$p_n > c > 0$	Марков, 1910 ([10])	Сапогов, 1947 ([12])	Сапогов, 1947 ([12])
$p_n n^{1/2+\varepsilon} \to \infty$, $\varepsilon > 0$	Бернштейн, 1926 ([1])	Сапогов, 1947 ([12])	Сапогов, 1947 ([12])
$p_n n^{1/2+\varepsilon} \to \infty$, $\varepsilon > 0$	Бернштейн, 1928([2,3])	Линник, 1948 ([8,9])	
$p_n n^{1/2} \to \infty$	Сапогов, 1947 ([11])		

Под p_n в первых двух столбцах подразумевается нижняя грань вероятностей перехода $P\{\xi_{in} = a \,/\, \xi_{i-1,\,n} = b\}$ по всем i и возможным значениям a и b; в последнем столбце — аналогичная грань для плотностей вероятностей перехода. Кроме того, Бернштейном были опубликованы ([4], 1936) оценки снизу для дисперсии $D\zeta_n$, существенно используемые во всех дальнейших работах. Бернштейн ([1], 1926) привел также пример, показывающий, что при $p_n \sim an^{-1/2}$ может существовать ненормальное предельное распределение. В формулируемой ниже теореме 1 дается общее условие асимптотической нормальности для цепей с абстрактным множеством состояний. Эта теорема включает в себя все результаты, собранные в схеме, а также заполняет пустые клетки этой схемы.

Пусть задано множество состояний Ω * и борелевское тело $\mathfrak{B}$ его подмножеств, называемых измеримыми. Оператором вероятностей перехода называется функция $P(x, B)$ от $x \in \Omega$, $B \in \mathfrak{B}$, являющаяся при фиксированном x вероятностной мерой на Ω, при фиксированном B — измеримой функцией от x. Назовем мерой эргодичности ρ оператора P нижнюю грань чисел α таких, что существует мера $\mu(B)$ с $\mu(\Omega) = \alpha$ и $P(x, B) \geqslant \mu(B)$ при всех x и B. Мера эргодичности ρ равна также (это указано нам А. Н. Колмогоровым)

$$\inf_{\{B_i\}} \sum_i \inf_{x \in \Omega} P(x, B_i),$$

* Общность наших теорем не увеличится, если разрешить Ω зависеть от i и n.

где первая нижняя грань берется по всевозможным разбиениям Ω на суммы конечного числа непересекающихся измеримых множеств B_i. Если Ω счетно, оператор $P(x, B)$ сводится к матрице вероятностей перехода (p_{ij}) и $\rho = \sum_j \min_i p_{ij}$.

Неоднородная цепь Маркова с n моментами времени задается начальным распределением вероятностей $P(B)$ и $n-1$ операторами вероятностей перехода $P_i(x, B)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда естественным образом определяется распределение вероятностей в пространстве $\overline{\Omega} = \Omega^{(1)} \times \ldots \times \Omega^{(n)}$, являющемся прямым произведением n «экземпляров» $\Omega^{(i)}$ пространства Ω. Пусть ξ_i — измеримая функция, определенная сначала на $\Omega^{(i)}$ и затем продолженная естественным образом на все $\overline{\Omega}$. Совокупность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называют связанной в неоднородную цепь Маркова с вероятностями перехода $P_i(x, B)$. Положим $\zeta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Мы будем в дальнейшем рассматривать последовательность неоднородных цепей Маркова, из которых n-я имеет n моментов времени. В соответствии с этим все введенные в этом абзаце объекты будут зависеть от дополнительного индекса $n = 1, 2, \ldots$ Обозначим через ρ_{in} меру эргодичности оператора $P_{in}(x, B)$ и положим $\rho_n = \min_{i=1,\ldots,n} \rho_{in}$.

Теорема 1. *Пусть случайные величины ξ_{in} равномерно ограничены, $|\xi_{in}| \leqslant C$, и пусть их дисперсии равномерно отличны от нуля $D\xi_{in} \geqslant c > 0$. Если $\rho_n n^{1/3} \to \infty$, то при $n \to \infty$*

$$P\left\{\frac{\zeta_n - M\zeta_n}{\sqrt{D\zeta_n}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt. \tag{1}$$

Откажемся от ограниченности величин ξ_{ij}, предложив лишь равномерную ограниченность их дисперсий. Тогда

Теорема 2. *Пусть $0 < c \leqslant D\xi_{in} \leqslant C^2 < \infty$. Если $\rho_n n^{1/3} \to \infty$ при $n \to \infty$ и если у случайных величин $\frac{\zeta_n - M\zeta_n}{\sqrt{D\zeta_n}}$ имеется предельное распределение, то это распределение является безгранично делимым.*

Анализируя пример Бернштейна (1), нетрудно установить, что для него величины ξ_{ij} ограничены, $\rho_n \sim an^{-1/3}$, а величина ζ_n имеет не безгранично делимое предельное распределение. Поэтому условие, наложенное на ρ_n в теоремах 2 и 3, не может быть улучшено. Далее, можно построить примеры, в которых величины ξ_{ij} имеют сколь угодно быстро убывающие на бесконечности распределения, $\rho_n n^{1/3} \to \infty$ и существует ненормальное предельное распределение. Однако имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть $0 < c < D\xi_{in} < C^2 < \infty$, $P\{\xi_{in} < x\} = F_{in}(x)$ и величины $\int_{|x|>\varepsilon} x^2\, dF_{in}(x) \to 0$ при $\varepsilon \to \infty$ равномерно по всем n и i. Если $\rho_n > a > 0$ при всех n, то верно* (1).

Метод доказательства отличен от применявшегося в цитированных вначале работах. Опишем конспективно основные идеи доказательств теорем 1 и 2. Предположим сразу, что $M\xi_{in} = 0$. Положим $\zeta_n^{ih} = \xi_{in} + \xi_{i+1,n} + \ldots + \xi_{kn}$ при $0 \leqslant i < k \leqslant n$. Нетрудно понять, что если велика сумма $\rho_{in} + \ldots + \rho_{kn}$, то величины ζ_n^{ai} и ζ_n^{kb}, где $0 \leqslant a < i < k < b \leqslant n$, станут независимыми, если изменить их на множестве малой вероятности. В условиях теорем 1 и 2 эта сумма велика при большом n для любого отрезка (i, k) длины $k - i = [n^{1/3}]$ *. Если бы удалось

* Здесь и дальше через [ ] обозначается целая часть.

асимптотически пренебречь величинами $\zeta_n^{k,k+[n^{1/3}]}$ в достаточно большом числе, то асимптотическое поведение ζ_n совпало бы с асимптотическим поведением суммы независимых бесконечно малых слагаемых, и отсюда вытекала бы сразу теорема 2. Подобное сведение использовал в более общей обстановке С. Н. Бернштейн (1), а Дёблин применял ((6), см. также (7)) его при изучении однородной цепи Маркова с непрерывным множеством состояний.

Очевидно, что $D\zeta_n^{k,k+[n^{1/3}]} < C^2 n^{2/3}$. Оказывается также, что $n^{-2/3} D\zeta_n \to \infty$. Отсюда и следует возможность пренебречь величиной $(D\zeta_n)^{-1/2} \zeta_n^{k,k+[n^{1/3}]}$ (здесь $(D\zeta_n)^{-1/2}$ — нормирующий множитель). Основная трудность при получении только что приведенной оценки снизу для $D\zeta_n$ состоит в том, что дисперсия $D\zeta_n^{0m}$ изменяется при возрастающем m немонотонно. Метод получения этой оценки отличен от метода получения оценки Бернштейна, используемой в предыдущих работах. Пусть $D(\zeta_n^{0m} / \eta)$ — условная дисперсия случайной величины ζ_n^{0m} при фиксированном состоянии системы η в m-й момент времени. Обозначим через $\overline{D}_n^m$ математическое ожидание этой условной дисперсии. Легко видеть, что всегда $D\zeta_n^{0m} - \overline{D}_n^m = \tilde{D}_n^m \geqslant 0$. Оказывается также, что $\overline{D}_n^{m+1} - \overline{D}_n^m \geqslant {}^1/_4 \tilde{D}_n \rho_{nm}$ (т. е. $\overline{D}_n^m$ возрастает монотонно). Можно показать также, что минимальная из двух дисперсий $\min(\tilde{D}_n^m, \tilde{D}_n^{m+1}) \geqslant D\xi_{mn}$. Отсюда следует нужная оценка.

Для доказательства теоремы 1 нужно еще проверить, что сумма независимых величин, к которой сведена задача, удовлетворяет условиям асимптотической нормальности ((5), стр. 109). Воспользуемся следующей леммой, легко вытекающей из этих условий:

Лемма. Пусть $\mu_1^n, \ldots, \mu_{r_n}^n$ — *независимые величины с* $D(\mu_1^n + \ldots + \mu_{r_n}^n) = 1$, *причем* $D\mu_\alpha^n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *равномерно по* α. *Пусть* $\mu_\alpha^n = \nu_\alpha^n + \tilde{\nu}_\alpha^n$, *где* $D\nu_\alpha^n \to 0$, $D\tilde{\nu}_\alpha^n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и величины* ν_α^n *и* $\tilde{\nu}_\alpha^n$ *не зависят от всех величин* ν_β^n, $\tilde{\nu}_\beta^n$ *при* $\alpha \neq \beta$. *Тогда из асимптотической нормальности сумм* $\nu_1^n + \ldots + \nu_{r_n}^n$ *и* $\tilde{\nu}_1^n + \ldots + \tilde{\nu}_{r_n}^n$ *следует асимптотическая нормальность суммы* $\mu_1^n + \ldots + \mu_{r_n}^n$.

Предположим сначала, что $\rho_n n^{1/3+\varepsilon} \to \infty$, где $\varepsilon > 0$. В нашем случае слагаемые μ_α^n имеют то же распределение, что и величина $(D\zeta_n)^{-1/2} \zeta_n^{k_\alpha, l_\alpha}$. Представим отрезок (k_α, l_α) в виде суммы прилегающих друг к другу отрезков, каждый из которых (кроме последнего) имеет длину $[n^{1/3}]$, и занумеруем эти подотрезки в естественном порядке. Положим ν_α^n равным сумме величин ξ_{in} по всем i, принадлежащим подотрезкам с четными номерами, $\tilde{\nu}_\alpha^n$ — с нечетными. Достаточно показать асимптотическую нормальность суммы $\sum_{\alpha=1}^{r_n} \nu_\alpha^n$ (и аналогичной суммы $\sum_{\alpha=1}^{r_n} \tilde{\nu}_\alpha^n$). Но величина ν_α^n равна сумме слагаемых вида $\tilde{\zeta} = (\zeta_{l, l+[n^{1/3}]}^n)(D\zeta_n)^{-1/2}$, где $(l, l + [n^{1/3}])$ — всевозможные «четные» подотрезки. В наших условиях $\sum_{m=l}^{l+[n^{1/3}]} \rho_{mn} > n^\varepsilon$ при больших n, откуда, как нетрудно увидеть, зависимость между величинами $\tilde{\zeta}$, соответствующими соседним через один подотрезкам, проявляется лишь на множестве элементарных событий вероятности меньше, чем e^{-n^ε}. Так как величины слагаемых $\tilde{\zeta}$ и их количество растут не быстрее, чем степенным образом, то можно пренебречь их общей зависимостью в совокупности. Так как величины

$|\tilde{\zeta}| < n^{-\varepsilon}$, то $\Sigma\nu_\alpha^n$ эквивалентна асимптотически сумме $\Sigma\tilde{\zeta}$ независимых, равномерно ограниченных бесконечно малой постоянной $n^{-\varepsilon}$ слагаемых, и поэтому асимптотически нормальна.

Более точный анализ показывает, что приведенное рассуждение пригодно при $\rho_n n^{1/3} \ln n \to \infty$. Переход к максимально возможному условию $\rho_n n^{1/3} \to \infty$ требует более сложных построений, связанных с более тонким изучением характера зависимости слагаемых $\tilde{\zeta}$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Бернштейн, Math. Ann., **97**, 1 (1926); С. Н. Бернштейн, Усп. матем. наук, **10**, 65 (1944). [2] С. Бернштейн, Изв. Акад. наук (6), № 15—17, 1459 (1926). [3] С. Бернштейн, ДАН, А, № 4, 56 (1928). [4] С. Бернштейн, Матем. сборн., **1**, 29 (1936). [5] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949. [6] W. Doeblin, Bull. Math. Soc. Roum. Sci., **39**, No. 1, 57; № 2, 3 (1937). [7] J. L. Doob, Stochastic Processes, N. Y.—L., 1953. [8] Ю. В. Линник, ДАН, **40**, 21 (1948). [9] Ю. В. Линник, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 65 (1949). [10] А. А. Марков, Зап. Акад. наук, VIII сер., **25**, 8, № 3 (1910). [11] Н. А. Сапогов, ДАН, **58**, 193 (1947). [12] Н. А. Сапогов, ДАН, **58**, 1905 (1947).