

МАТЕМАТИКА

М. Ш. БИРМАН

О ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ ТРЕФФТЦА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  $\Delta^2 u = f$

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 XII 1954)

В настоящей заметке рассматривается вопрос о построении для уравнения

$$\Delta^2 u = f \quad (1)$$

вариационных методов, аналогичных известному методу Треффтца в гармонической проблеме. Предлагается общий принцип построения минимальных функционалов для различных однородных граничных задач\*. Соответствующие результаты для эллиптических уравнений второго порядка были получены автором (<sup>1</sup>) на основе теории расширений операторов и теории общих граничных задач. В настоящей заметке принят элементарный метод изложения.

Предложенный Треффтцем вариационный метод решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа обладает двумя характерными особенностями: 1) минимум ищется на функциях, удовлетворяющих дифференциальному уравнению; 2) метод позволяет оценить снизу минимум функционала обычного вариационного метода для той же задачи. Перенесение метода Треффтца на уравнение (1) в случае первой краевой задачи ( $u|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ ) не вызывало затруднений (<sup>2-5</sup>).

Попытки обобщения на другие граничные задачи сводились к тому, что функции сравнения подчинялись помимо дифференциального уравнения еще части граничных условий (<sup>6</sup>). Построение полной системы таких функций обычно представляет значительные трудности. Предлагаемый ниже принцип свободен от этого недостатка.

1. Граничные задачи. Рассмотрим уравнение (1) в ограниченной области  $\Omega$  с гладким контуром  $\Gamma_0$ . Каждой самосопряженной граничной задаче для уравнения (1) соответствует билинейная форма  $Q[u, v] = \int_{\Omega} \Delta^2 uv \, d\Omega$ , которую, пользуясь граничными условиями, можно привести к симметричному виду. Ниже всюду будем считать, что соответствующая квадратичная форма  $Q[u, u]$  неотрицательна. Как известно (см., например, (<sup>6</sup>)), решение  $u$  граничной задачи реализует минимум функционала

$$A(w) = Q[w, w] - 2 \int_{\Omega} wf \, d\Omega, \quad (2)$$

заданного на любых (достаточно гладких) функциях  $w$ , удовлетворяющих главным (кинематическим) граничным условиям. Удовлетво-

\* Указанный принцип легко может быть обобщен на уравнения высших порядков и уравнения с переменными коэффициентами, что, повидимому, не представляет существенного интереса. Имея в виду приложения к теории тонких пластин, мы рассматриваем уравнение (1) на плоскости. Перенесение полученных результатов на неоднородные граничные задачи может быть произведено обычным путем.

рение естественным (статическим) граничным условиям необязательно. Отметим, что

$$A(u) = -Q[u, u]. \quad (3)$$

Пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — два экземпляра контура  $\Gamma_0$ ;  $\Gamma_1 = S_1 + \mathcal{L}_1$ ;  $\Gamma_2 = S_2 + \mathcal{L}_2$ . Пусть  $L_2(\Gamma_i)$ ,  $L_2(S_i)$ ,  $L_2(\mathcal{L}_i)$  ( $i = 1, 2$ ) — гильбертовы пространства квадратично суммируемых, соответственно, по  $\Gamma_i$ ,  $S_i$ ,  $\mathcal{L}_i$  функций. Очевидно,  $L_2(\Gamma_i) = L_2(S_i) \oplus L_2(\mathcal{L}_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Пусть, далее,  $L_2(\Sigma) = L_2(S_1) \oplus L_2(S_2)$  — гильбертово пространство вектор-функций, первые составляющие которых — функции из  $L_2(S_1)$ , а вторые — из  $L_2(S_2)$ . Аналогично определяются пространства  $L_2(\Lambda) = L_2(\mathcal{L}_1) \oplus L_2(\mathcal{L}_2)$  и  $L_2(\Gamma) = L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2)$ . Очевидно,  $L_2(\Gamma) = L_2(\Sigma) \oplus L_2(\Lambda)$ . Обозначим через  $P_\Sigma$  и  $P_\Lambda$  проекторы в  $L_2(\Gamma)$ , соответственно, на  $L_2(\Sigma)$  и  $L_2(\Lambda)$ . Каждой (достаточно гладкой) функции  $u$  в  $\Omega$  сопоставим два «граничных вектора»:  $U = \{u|_\Gamma; -\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma\}$ ,  $U_n = \{\frac{\partial \Delta u}{\partial n}|_\Gamma; \Delta u|_\Gamma\}$ . Мы будем рассматривать граничные задачи для уравнения (1) с условиями вида

$$P_\Sigma U = 0, \quad (4)$$

$$P_\Lambda U_n - B P_\Lambda U = 0. \quad (5)$$

Здесь  $B$  — самосопряженный оператор в  $L_2(\Lambda)$ . Для  $Q[u, u]$  легко получить выражение

$$Q[u, u] = \int_\Omega (\Delta u)^2 d\Omega + \int_{\Gamma_0} P_\Lambda U \cdot B P_\Lambda U dS,$$

причем для соответствующего функционала (2) условие (4) — главное, а условие (5) — естественное. Форму  $Q[u, u]$  будем рассматривать на функциях, удовлетворяющих только условию (4). Если  $S_1 = S_2 = 0$ , то  $L_2(\Lambda)$  совпадает с  $L_2(\Gamma)$ ; в этом случае условие (4) отсутствует, а граничное условие (5) называется чисто естественным.

II. Основная теорема. Пусть требуется решить граничную задачу (4), (5) для уравнения (1). Выберем вспомогательную граничную задачу с неотрицательной квадратичной формой и с чисто естественным условием

$$U_n - A U = 0 \quad (6)$$

так, чтобы действующий в  $L_2(\Lambda)$  самосопряженный оператор  $M = B - P_\Lambda A P_\Lambda$  был положительно-определенным. Построим билинейный функционал

$$H[u, v] = \bar{Q}[u, v] + \int_{\Gamma_0} M^{-1}(P_\Lambda U_n - P_\Lambda A U) \cdot (P_\Lambda V_n - P_\Lambda A V) dS.$$

Здесь  $\bar{Q}[u, v]$  — билинейная форма граничной задачи (6).

Отметим два свойства функционала  $H[u, v]$ :

- 1) если  $u$  удовлетворяет условиям (4), (5), то  $H[u, u] = Q[u, u]$ ;
- 2) если  $u$  удовлетворяет условиям (4), (5), а  $v$  — достаточно гладкое решение уравнения  $\Delta^2 v = 0$ , то  $H[u, v] = 0$ .

На основании этих свойств легко доказывается

*Теорема. Среди решений  $w$  уравнения (1) наименьшее значение функционалу  $H[w, w]$  сообщает решение  $u$  граничной задачи (4), (5). Минимизирующая последовательность сходится к  $u$  в метрике функционала  $H[w, w]$ . При этом*

$$H[u, u] = Q[u, u]. \quad (7)$$

Приведенная теорема дает возможность для одной и той же граничной задачи строить различные методы, аналогичные методу Треффца, в зависимости от выбора вспомогательной граничной задачи (6). Соотношения (3) и (7) дают возможность двусторонней оценки функционала  $A(u)$ .

III. Приложения к граничным задачам теории тонких пластин. Потенциальная энергия тонкой пластины, как известно, имеет вид

$$W(u) = \int_{\Omega} [(\Delta u)^2 - 2(1-\nu)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) - 2uf] d\Omega. \quad (8)$$

Выражение (8) удобнее преобразовать к виду

$$W(u) = \int_{\Omega} [(\Delta u)^2 - 2uf] d\Omega - (1-\nu) \int_{\Gamma_0} \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial S} \right)^2 \right] dS. \quad (9)$$

Здесь  $\nu$  — постоянная Пуассона, а  $\rho$  — радиус кривизны контура, который следует считать положительным, если центр кривизны лежит на внутренней нормали к контуру (выпуклый участок), и отрицательным, если центр кривизны лежит на внешней нормали (вогнутый участок). Уравнением Эйлера для (9) является уравнение (1). Статические граничные условия в различных случаях закрепления можно получить из условия  $\delta W(u) = 0$ .

1) Заделанная пластина. Оба граничных условия — кинематические:  $u|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_0} = 0$ . Здесь  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = 0$ . Условия (4), (5) сводятся к условию  $U = 0$ . Квадратичная форма  $Q[w, w]$  имеет вид

$$Q[w, w] = \int_{\Omega} (\Delta w)^2 d\Omega.$$

2) Свободно опертая пластина. Кинематическое граничное условие  $u|_{\Gamma_0} = 0$ . Второе (статическое) условие имеет вид  $\Delta u - \frac{1-\nu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_0} = 0$ . Здесь  $\mathcal{L}_1 = S_2 = 0$ ;  $S_1 = \Gamma_1$ ;  $\mathcal{L}_2 = \Gamma_2$ . Граничные условия можно записать в виде

$$P_{\Sigma} U = 0, \quad P_{\Lambda} U_n + \frac{1-\nu}{\rho} P_{\Lambda} U = 0.$$

Квадратичная форма  $Q[w, w]$ :

$$Q[w, w] = \int_{\Omega} (\Delta w)^2 d\Omega - (1-\nu) \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 dS.$$

3) Свободная пластина. Граничные условия статические (чисто естественные):

$$U_n - (1-\nu) \left( \frac{\partial}{\partial S} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial^2}{\partial S^2} \right) U = 0; \quad (10)$$

$$Q[w, w] = \int_{\Omega} (\Delta w)^2 d\Omega - (1-\nu) \int_{\Gamma_0} \left[ 2 \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial w}{\partial S} \right)^2 \right] dS.$$

Перейдем к построению функционалов  $H[w, w]$ .

1) Заделанная пластина. Выбирая в качестве вспомогательной граничной задачи (6) задачу с условием

$$U_n - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} U = 0 \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0),$$

получим, что

$$H[w, w] = \int_{\Omega} (\Delta w)^2 d\Omega + \int_{\Gamma_0} \left[ \alpha w^2 + \beta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 \right] dS.$$

При  $\alpha = \beta = 0$  получим обычно употребляемую форму функционала.

2) Свободно опертая пластина. а) Контур  $\Gamma_0$  выпуклый ( $\rho > 0$ ). В качестве (6) возьмем граничное условие (10) при  $\nu_1 < \nu$ . Тогда

$$H[w, w] = \int_{\Omega} [(\Delta w)^2 - 2(1 - \nu_1)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)] d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_0} \frac{\rho}{\nu - \nu_1} \left[ \Delta w - (1 - \nu_1) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right]^2 dS.$$

б) Пусть  $\Gamma_2 = S_2 + \mathcal{L}_2$ , на  $S_2$  пластина заделана, а на  $\mathcal{L}_2$  оперта, причем на  $\mathcal{L}_2$   $\rho < 0$ . В качестве вспомогательной граничной задачи можно взять задачу с условием  $U_n = 0$ . Тогда

$$H[w, w] = \int_{\Omega} (\Delta w)^2 d\Omega - \int_{\mathcal{L}_2} \frac{\rho}{1 - \nu} (\Delta w)^2 dS.$$

3) Свободная пластина. В качестве вспомогательной граничной задачи можно взять задачу с условием

$$U_n - [(1 - \nu) C - \alpha] U = 0.$$

Здесь  $C$  — та же матрица, что и в условии (10), а  $\alpha$  — достаточно малое положительное число. Для функционала  $H[w, w]$  тогда получается выражение

$$H[w, w] = \int_{\Omega} [(\Delta w)^2 - 2(1 - \nu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)] d\Omega - \\ - \alpha \int_{\Gamma_0} \left[ w^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 \right] dS + \\ + \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[ \frac{\partial \Delta w}{\partial n} - (1 - \nu) \left( \frac{\partial}{\partial S} \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial S} - \frac{\partial^2}{\partial S^2} \frac{\partial w}{\partial n} \right) + \alpha w \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \Delta w - (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} \right) - \alpha \frac{\partial w}{\partial n} \right]^2 \right\} dS,$$

причем функции сравнения  $w$  следует подчинить дополнительному условию

$$\int_{\Omega} w(ax + by + c) d\Omega = 0.$$

Аналогичные формулы легко получить и для свободно опертой пластины с произвольным контуром, а также для ряда других практически важных граничных задач.

Ленинградский  
горный институт

Поступило  
1 XII 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> М. Ш. Бирман, ДАН, 93, № 6 (1953). <sup>2</sup> Wegner, Forschungsh. Stahlbau, 6 (1943). <sup>3</sup> З. Х. Рафальсон, ДАН, 64, № 6 (1949). <sup>4</sup> Г. А. Гринберг, ДАН, 76, № 5 (1951). <sup>5</sup> E. Berger, Oster. Ing. Arch., 7, № 1 (1953). <sup>6</sup> С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, 1950.