

Г. А. АРТЕМОВ

**ОБ ОДНОМ ВИДОИЗМЕНЕНИИ МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ СИСТЕМ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

В работах ^(1, 2) доказана справедливость основной теоремы С. А. Чаплыгина ⁽³⁾ для систем n дифференциальных уравнений нормальной формы.

В работе ⁽²⁾ частично перенесен на указанную систему метод Чаплыгина решения одного уравнения: рассмотрен случай, когда гиперповерхности, определяемые правыми частями уравнений системы, заменяются касательными гиперплоскостями, а аппроксимирующие кривые приближаются к интегральным кривым системы с одной стороны. Для этого случая доказана сходимость построенного процесса и дана оценка приближений. Согласно ⁽²⁾ нахождение аппроксимирующих кривых системы сводится к решению линейной системы n дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами, что практически трудно осуществимо.

В настоящей заметке мы, пользуясь идеей Чаплыгина, строим упрощенный метод нахождения аппроксимирующих кривых, приближающихся с двух сторон к интегральным кривым нелинейной системы n дифференциальных уравнений 1-го порядка определенного типа, и даем оценку приближений. Предлагаемый метод может быть применен к решению одного уравнения, при этом получаемые приближения, вообще говоря, будут сходиться медленнее, чем при методе Чаплыгина, однако этот метод выгодно отличается тем, что для некоторого типа дифференциальных уравнений приводит к берущимся интегралам на всех стадиях процесса.

1°. Рассмотрим примерные методы для нахождения решения уравнения

$$x' = f(t, x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — искомый n -мерный вектор — функция от t ; $f(t, x) = [f_1(t, x), f_2(t, x), \dots, f_n(t, x)]$ — данный вектор; $f_i(t, x)$ — непрерывные функции в интервале $(t_0, t_1]$.

Решение уравнения (1) будем находить при заданном условии $x|_{t_0} = x_0$.

Полагаем: а) вектор $x \leq y$, если $x_i(t) \leq y_i(t)$ для всех t ; б) вектор $\underline{x}(\bar{x})$ будем называть нижним (верхним) вектором решения уравнения (1), если $\underline{x}|_{t_0} = x_0$ ($\bar{x}|_{t_0} = x_0$), а подстановка в уравнение (1) даст невязку $\underline{x}' - f(t, \underline{x}) = \underline{\varphi}(t) < 0$ (соответственно, $\bar{\varphi}(t) > 0$); в) $f(t, x)$ рассматривается в замкнутой области D , определяемой условиями $t_0 \leq t \leq t_1$, $\underline{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_0$, где $\underline{x}_0$ и $\bar{x}_0$ — некоторые нижние и верхние векторы уравнения (1).

Относительно составляющих $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) вектора $f(t, x)$ предполагаем: 1) существуют непрерывные производные 1-го и 2-го порядков по x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в области D ; 2) $\partial f_i / \partial x_k > 0$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$); 3) квадратичные формы $\sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} x_k x_j$ ($i = 1, 2, \dots, n$) отрицательны; 4) $\partial^2 f_i / \partial x_j \partial x_k \geq 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$; $k = 2, 3, \dots, n$, $j \neq k$).

Согласно (2) в предположении 2) для уравнения (1) справедлива теорема Чаплыгина.

Для построения процесса докажем следующую лемму:

Лемма 1. Если в области D $\partial^2 f / \partial x_i^2 \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_k \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $k = 2, 3, \dots, n$, $i < k$), то точки гиперповерхности $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ расположены не ниже точек гиперплоскости

$$Z = f(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_n) - f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)}{\bar{x}_i - \underline{x}_i} (x_i - \underline{x}_i) \quad (2)$$

при $\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i$.

Действительно, можно показать, что

$$\begin{aligned} \gamma = z - Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)(x_i - \underline{x}_i) f_{x_i^2}^*(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{i-1}, \xi_i, \underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_n) + \\ + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i < k}}^n (x_i - \underline{x}_i)(x_k - \underline{x}_k) \times \\ \times f_{x_i x_k}^*(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{i-1}, \eta_i, \underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_{k-1}, \eta_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (3)$$

где $x_i < \xi_i < \bar{x}_i$, $\underline{x}_i < \eta_i < x_i$ и $\underline{x}_k < \eta_k < x_k$, откуда следует справедливость леммы 1.

Замечание. Если $\partial^2 f / \partial x_i^2 \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_k \leq 0$ ($i < k$), то $z - Z \leq 0$.

2°. Построим последовательность нижних векторов. Пусть $\underline{x}_0$ — нижний вектор решения уравнения (1), тогда

$$\underline{x}'_0 - f(t, \underline{x}_0) = \varphi_0(t) < 0. \quad (4)$$

Очевидно, $x = \underline{x}_0 + \alpha_1$, где α_1 , на основании (4), будет решением уравнения

$$\alpha'_1 - f(t, x) + f(t, \underline{x}_0) + \varphi_0 = 0. \quad (5)$$

Согласно лемме 1 каждую составляющую вектора $f(t, x)$ можно представить в виде $f_i = Z_i + \gamma_i$, где Z_i — выражение (2) для функции f_i , а γ_i — выражение (3) для тех же функций. Поэтому

$$f(t, x) = f(t, \underline{x}_0) + \Phi(t)(x - \underline{x}_0) + \gamma(t), \quad (6)$$

где

$$\Phi(t) = \left\| \frac{f_i(t, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{k-1}, \underline{x}_k, \underline{x}_{k+1}, \dots, \underline{x}_n) - f(t, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)}{\underline{x}_k - \underline{x}_k} \right\|$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

а $\gamma(t) = \|\gamma_i\|_{(i=1, 2, \dots, n)}$, и (5) принимает вид

$$\alpha'_1 - \Phi(t) \alpha_1 + \varphi_0 = \gamma(t). \quad (7)$$

Следуя Чаплыгину, вместо уравнения (7) рассматриваем уравнение

$$\alpha'_1 - \Phi(t) \alpha_1 + \varphi_0 = 0. \quad (8)$$

Лемма 2. Если в уравнении

$$\dot{x} = p(t)x + f(t) \quad (9)$$

$p(t)$ — непрерывная n -мерная матрица, а $f(t)$ — непрерывный n -мерный вектор в интервале $(t_0, t_1]$, причем $p(t) > 0$ и $f(t) > 0$, то вектор

$$\tilde{x} = \int_{t_0}^t \left[E + \int_{\tau}^t p(z) dz \right] f(\tau) d\tau \quad (10)$$

удовлетворяет неравенству $0 < \tilde{x} < x$ для любого $t \in (t_0, t_1]$, где x — решение уравнения (9) при начальном условии $x|_{t_0} = 0$.

Доказательство. При $p(t) > 0$ и $f(t) > 0$ из (10) следует $0 < \tilde{x}$. Результат подстановки $\tilde{x}$ в уравнение (1) будет

$$-p(t) \int_{t_0}^t \left[\int_{\tau}^t p(z) dz \right] f(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Кроме того $\tilde{x}|_{t_0} = 0$, поэтому на основании теоремы Чаплыгина заключаем $\tilde{x} < x$.

Применяя формулу (10) к уравнению (8), вместо α_1 получим $\tilde{\alpha}_1$. Коэффициенты уравнения (8) удовлетворяют условиям леммы 2, поэтому $0 < \tilde{\alpha}_1 < \alpha_1$ в интервале $(t_0, t_1]$ и $\underline{x}_0 < \underline{x}_1 = \underline{x}_0 + \tilde{\alpha}_1 < x$. Легко видеть, что $\underline{x}_1$ является нижним вектором. Повторяя процесс, получим монотонную последовательность векторов, связанных соотношением

$$\underline{x}_0 < \underline{x}_1 < \underline{x}_2 < \dots < x. \quad (12)$$

3°. Пусть $\bar{x}_0$ — верхний вектор, тогда

$$\bar{x}'_0 - f(t, \bar{x}_0) = \bar{\varphi}_0 > 0. \quad (13)$$

Полагая $x = \bar{x}_0 - \beta_1$, для β_1 получим уравнение

$$\beta'_1 - f(t, \bar{x}_0) - f(t, x) - \bar{\varphi}_0 = 0. \quad (14)$$

Разложив $f(t, x)$ по степеням $x - \bar{x}$ — по формуле Тейлора, получим уравнение

$$\beta_1' - f_x'(t, \bar{x}) \beta_1 - \bar{\varphi}_0 = -\frac{f''(t, \xi)}{2}(x - \bar{x})(x - \bar{x})',$$

которое заменяем линейным уравнением

$$\beta_1' - f_x'(t, \bar{x}) \beta_1 - \bar{\varphi}_0 = 0. \quad (15)$$

К уравнению (15) применяем тот же процесс, что при построении последовательности нижних векторов; это приводит к монотонно убывающей последовательности верхних векторов

$$\bar{x}_0 > \tilde{x}_1 > \dots > x. \quad (16)$$

4°. Сопоставляя нижние и верхние векторы, полученные согласно построенному процессу, с соответствующими векторами, полученными по методу последовательных приближений, получаем следующую теорему:

Теорема 1. *Последовательности нижних и верхних векторов, полученные согласно построенному процессу, равномерно сходятся к решению уравнения (1).*

Скорость сходимости процесса оценивается так:

$$\max_i |\tilde{x}_m^{(1)} - x_m^{(1)}| < N^m \max_{t_0 < t \leq t_1} |\bar{x}_0^{(1)} - x_0^{(1)}| \frac{(t - t_0)^m}{m!} = M^n \Delta \frac{(t - t_0)^{m+1}}{(m+1)!},$$

где

$$N = n \max_{i, k} \left(\max_{t_0 < t \leq t_1} |\partial f_i / \partial x_k| \right), \quad M = n \min_{i, k} \left(\min_{t_0 < t \leq t_1} |\partial f_i / \partial x_k| \right)$$

и

$$\Delta = \min_i \left(\min_{t_0 < t \leq t_1} |\bar{\varphi}_0^{(i)} - \underline{\varphi}_0^{(i)}| \right) \neq 0.$$

В заключение считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность С. Г. Крейну за помощь в работе.

Криворожский горнорудный институт

Поступило
25 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. Максудов, Уч. зап. Казанск. унив., 94, кн. 7.53 (1934). ² А. В. Герфанд, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5—6, 583 (1938). ³ С. В. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, 1950.