

Г. А. МЕРМАН

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЗАХВАТА В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 29 IX 1954)

В работах ^(8,5,6,3) были построены различные примеры захвата в полной и ограниченной задачах трех тел. При этом в ^(8,5) использовалось численное интегрирование, а в ^(6,3) — строгие методы. В статье ⁽²⁾ мы получили достаточные условия захвата в ограниченной задаче. В настоящей заметке эти результаты обобщаются на полную задачу трех тел.

Пусть три тела P_0, P_1, P_2 имеют массы $m_0, m_1, m_2, M = m_0 + m_1 + m_2$. Обозначим через $\vec{\rho}$ вектор, идущий из центра тяжести тел P_1 и P_2 к телу P_0 , $\vec{r} = \vec{r}_{21}$,

$$\vec{R} = m_0 \left(\frac{\vec{r}_{10}}{r_{10}^3} + \frac{\vec{r}_{02}}{r_{02}^3} \right), \quad \vec{P} = \frac{M}{m_1 + m_2} \left(m_1 \frac{\vec{r}_{10}}{r_{10}^3} + m_2 \frac{\vec{r}_{20}}{r_{20}^3} \right).$$

Тогда дифференциальные уравнения движения запишутся в виде:

$$\ddot{\vec{r}} + (m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{R}, \quad \ddot{\vec{\rho}} + \vec{P} = 0. \quad (1)$$

В дальнейшем будем считать, что в начальный момент $t = 0$ происходит тесное сближение тел P_1 и P_2 , так что для достаточно малых $|t|$ векторы $\vec{R}$ и $\vec{P}$ также малы по модулю, так как r_{10} и r_{02} велики в сравнении с r . Подобно тому как это было сделано в ⁽²⁾ для ограниченной задачи, введем в рассмотрение приближенную схему, в которой пренебрегаем векторами $\vec{R}$ и $\vec{P}$:

$$\ddot{\vec{r}}_0 + (m_2 + m_1) \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} = 0, \quad \ddot{\vec{\rho}} = 0. \quad (2)$$

Составим уравнение для вектора $\vec{\Delta} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Вычитая (2) из (1), найдем:

$$\ddot{\vec{\Delta}} + (m_2 + m_1) \left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \vec{r}_0 + \frac{\vec{\Delta}}{r^3} \right] = \vec{R} \quad (\vec{\Delta}(0) = \dot{\vec{\Delta}}(0) = 0),$$

что дает после элементарных преобразований оценку:

$$|\ddot{\vec{\Delta}}| \leq (m_2 + m_1) \left[\frac{|r - r_0|}{r} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rr_0} + \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{\Delta}{r^3} \right] + R,$$

где $\Delta = |\vec{\Delta}|, R = |\vec{R}|$.

Так как $|r - r_0| \leq \Delta, r \geq r_0 - \Delta$, то окончательно получим:

$$|\ddot{\vec{\Delta}}| \leq 4(m_2 + m_1) \frac{\Delta}{(r_0 - \Delta)^3} + R, \quad |\ddot{\vec{\rho}}| \leq P \quad (P = |\vec{P}|),$$

* Доложено на заседании отдела эволюции Земли Геофизического института АН СССР в Москве 8 V 1953 г.

откуда

$$|\dot{\Delta}| \leq 4(m_2 - m_1) \int_0^t \frac{\Delta dt}{(r_0 - \Delta)^3} + \int_0^t R dt, \quad |\dot{\rho} - \dot{\rho}(0)| \leq \int_0^t P dt.$$

Нашей задачей прежде всего будет оценить сверху величины $|\dot{\Delta}|$, $|\dot{\rho} - \dot{\rho}(0)|$ в течение промежутка $0 \leq t \leq \tau$. Пусть найдены такие положительные числа $\varepsilon(\tau)$ и $\delta(\tau)$, что

$$|\dot{\rho} - \dot{\rho}(0)| \leq \varepsilon, \quad |\dot{\Delta}| \leq \delta \quad (0 \leq t \leq \tau). \quad (3)$$

Очевидно, что если ε и δ выбрать на основании неравенств

$$\varepsilon \geq \int_0^\tau P dt, \quad \delta \geq 4(m_2 - m_1) \int_0^\tau \frac{\Delta dt}{(r_0 - \Delta)^3} + \int_0^\tau R dt$$

(где справа некоторые величины могут быть заменены их верхними границами), то условия (3) будут удовлетворены.

Второе из неравенств (3) дает

$$\Delta \leq \delta t \quad (0 \leq t \leq \tau),$$

и, следовательно, можно взять

$$\delta \geq 4(m_2 + m_1) I \delta + \int_0^\tau R dt,$$

где I есть верхняя граница интеграла $\int_0^\tau \frac{t dt}{(r_0 - \delta t)^3}$. Обозначая через I_1

и I_2 верхние границы интегралов $\int_0^\tau \frac{dt}{r_{02}^2}$ и $\int_0^\tau \frac{dt}{r_{01}^2}$, получим

$$\varepsilon \geq \frac{M}{m_1 + m_2} (m_1 I_1 + m_2 I_2), \quad \delta \geq \frac{m_0 (I_1 + I_2)}{1 - 4(m_2 + m_1) I}. \quad (4)$$

Так как вектор $\mathbf{r}_0$ вычисляется по формулам кеплерова движения, то мы свели таким образом нашу задачу определения ε и δ к совершенно аналогичной задаче, решенной нами для случая ограниченной проблемы трех тел в работе (2). Сформулируем поэтому прямо результат.

Обозначим

$$\varepsilon_0 = |\dot{\mathbf{r}}_0(\tau) - \dot{\mathbf{r}}_0(0)|, \quad \varepsilon_v = \frac{m_v}{m_1 + m_2} (\varepsilon_0 + \delta) + \varepsilon \quad (v = 1, 2),$$

$$k_1 = \frac{\dot{r}_{02}(0) - \varepsilon_1}{|\dot{\mathbf{r}}_{02}(0)| - \varepsilon_1}, \quad k_1' = \sqrt{1 - k_1^2}, \quad \eta_2 = |\dot{\mathbf{r}}_{01}(0)| + \varepsilon_2.$$

Тогда (при условии $k_1^2 < 1$, $\tau \eta_2 < r_{01}(0)$) величины I_1 и I_2 вычисляются по формулам:

$$I_1 = \frac{1}{k_1' [|\dot{\mathbf{r}}_{02}(0)| - \varepsilon_1] r_{02}(0)} \arctg \frac{k_1'}{k_1 + \frac{r_{02}(0)}{[|\dot{\mathbf{r}}_{02}(0)| - \varepsilon_1] \tau}},$$

$$I_2 = \frac{1}{r_{01}(0) \left[\frac{r_{01}(0)}{\tau} - \eta_2 \right]}.$$

Что касается величины I , то легко дать для нее явное выражение, пригодное для вычисления. Так например, если начальный момент выбран в момент прохождения тела P_2 через перигелий точной гиперболы, которую оно описывало бы в случае выполнения уравнений (2), то для I можно вывести следующую формулу:

$$I = \frac{a}{(m_1 + m_2)(1 - z)^3} \left[\frac{1}{r_0(0)} - \frac{1}{r_0(\tau)} \right],$$

где

$$z = \frac{e\delta}{na\sqrt{e^2 - 1}};$$

a, e — полуось и эксцентриситет гиперболы; $n^2 a^3 = m_1 + m_2$.

Допустим, что мы нашли ε и δ , удовлетворяющие неравенствам (4). Тогда для момента $t = \tau$ можно написать:

$$|\dot{\vec{r}}(\tau) - \dot{\vec{r}}(0)| \leq \varepsilon, \quad |\dot{\vec{r}}(\tau) - \dot{\vec{r}}_0(\tau)| \leq \delta,$$

$$|\vec{r}(\tau) - \vec{r}(0) - \dot{\vec{r}}(0)\tau| \leq \varepsilon\tau, \quad |\vec{r}(\tau) - \vec{r}_0(\tau)| \leq \delta\tau.$$

Так как векторы $\vec{r}(0)$, $\dot{\vec{r}}(0)$, $\vec{r}_0(\tau)$, $\dot{\vec{r}}_0(\tau)$ известны, то при помощи найденных ε и δ легко найти границы составляющих векторов $\vec{r}(\tau)$, $\dot{\vec{r}}(\tau)$, $\vec{r}_0(\tau)$, $\dot{\vec{r}}_0(\tau)$. Если эти границы при $\tau = t_1$ ($t_1 > 0$) удовлетворяют какому-либо критерию гиперболо-эллиптического движения при $t \rightarrow +\infty$, а при $\tau = -t_2$ ($t_2 > 0$) — критерию гиперболического движения при $t \rightarrow -\infty$, то это значит, что имеет место захват. Соответствующие критерии можно найти в работах (1, 4, 7).

Как показано в (2), легко написать необходимые и достаточные условия захвата в приближенной схеме. Очевидно, что если начальные данные удовлетворяют этим условиям и если ε и δ достаточно малы, то захват будет иметь место и в действительной проблеме трех тел.

Из приведенных формул видно, что малость ε и δ будет обеспечена в случае тесного двойного сближения тел P_1 и P_2 при $t = 0$,

если только $4(m_2 + m_1) \int_0^{\tau} \frac{t dt}{r_0^3} < 1$. С другой стороны, легко показать,

что наличие тесного двойного сближения является необходимым условием захвата, так как, если все три взаимных расстояния в некоторый момент времени достаточно велики, то должны выполняться критерии гиперболического либо гиперболо-эллиптического движения, приведенные в статье (4) (см. более подробное доказательство аналогичного утверждения для ограниченной задачи в работе (2)).

Выбирая всевозможными способами начальные данные и проверяя выполнение написанных условий, можно получить область захвата (точнее говоря, ее часть). Таким образом можно показать, например, что условиям захвата удовлетворяют начальные данные в примере О. Ю. Шмидта (8).

Институт теоретической астрономии
Академии наук СССР

Поступило
22 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. А. Мерман, ДАН, 85, № 4 (1952). ² Г. А. Мерман, Бюлл. Инст. теор. астр., 5, № 6/69, 325 (1953). ³ Г. А. Мерман, там же, стр. 373. ⁴ Г. А. Мерман, Астр. журн., 30, в. 3 (1953). ⁵ О. А. Сизова, ДАН, 86, № 3 (1952). ⁶ К. А. Ситников, Матем. сборн., 32, (74): 3 (1953). ⁷ Г. Ф. Хильми, Проблема n тел в небесной механике и космогонии, Изд. АН СССР, М., 1951. ⁸ О. Ю. Шмидт, ДАН, 58, № 2 (1947).