Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 6

ГИДРОМЕХАНИКА

Н. Н. ВЕРИГИН

О ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД ВБЛИЗИ ПЛОТИН

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 5 X 1954)

Для определения подъема (подпора) грунтовых вод в районах плотин, потерь на фильтрацию в обход плотин и изменения естественного грунтового питания водохранилищ требуется исследование движения грунтовых вод в береговой зоне вблизи плотины.

Движение грунтовых вод в этой зоне приближенно описывается уравнением так называемой „плановой задачи" подземной гидродинамики ([6]). При горизонтальном ложе грунтового потока и однородном грунте это уравнение аналогично двухмерному уравнению теплопроводности и имеет вид ([1,2])

$$a\nabla^2 u = \partial u/\partial t, \quad u = h^2, \qquad (1)$$

где h — глубина (напор) потока в точке с координатами x, y в момент времени t; a — коэффициент пьезопроводимости.

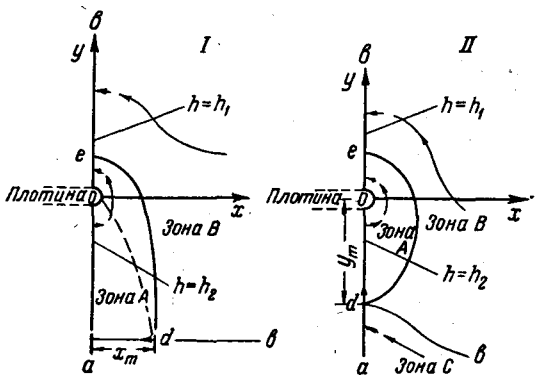


Рис. 1

Для решения уравнения (1) мы будем пользоваться известным в гидромеханике и теории теплопроводности методом источников и вихрей.

Рассмотрим принципиальную схему движения грунтовых вод в берегах реки вблизи плотины (см. рис. 1). Допустим, что до устройства плотины у реки aOb существует одномерный грунтовый поток, направленный нормально к реке и имеющий удельный расход q_0. Берег реки будем считать отвесным, а прилегающую к нему область грунтового потока — неограниченной.

Пусть после устройства плотины в момент времени $t = 0$ уровень воды вдоль уреза верхнего бьефа Oa мгновенно повышается от высоты h_1 до высоты h_2 и затем поддерживается постоянным. Тогда условия задачи могут быть записаны следующим образом:

$$h(x, y, 0) = \sqrt{h_1^2 - 2\frac{q_0}{k}x} = h_e(x, y), \qquad (2)$$

$$h(0, y, t) = h_1 \quad (\text{для } y > 0); \qquad h(0, y, t) = h_2 \quad (\text{для } y < 0), \qquad (3)$$

где k — коэффициент фильтрации грунта.

Начальное условие (2) является частным решением уравнения (1) при $\partial u/\partial t = 0$ (т. е. при установившемся движении). Поместим в точке сопряжения плотины с берегом O линейный вихрь, непрерывно действующий начиная с момента времени $t = 0$, и сложим вызванное им течение с линейным потоком вдоль оси x, образующимся при мгновенном повышении горизонта воды вдоль уреза реки aOb. Тогда получим решение задачи в следующем виде:

$$h = \sqrt{h_c^2 + {}^1/_2 (h_2^2 - h_1^2)[\operatorname{erfc} v - B(v, w)]}, \tag{4}$$

где $v = x/2\sqrt{at}$; $w = y/x$, а величина $B(v, w)$, выражающая потенциал непрерывного линейного вихря, может быть представлена в виде следующей специальной функции:

$$B(v, w) = \frac{2}{\pi}\left\{\operatorname{arc\,tg} w + e^{-v^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{v^{2k}}{k!}\sum_{n=1}^{k}(-1)^n\frac{w^{2n-1}}{2n-1}\right]\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}e^{-v^2}\left\{\operatorname{arc\,tg} w + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}w^{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{v^{2k}}{k!}\right]\right\}. \tag{5}$$

На рис. 2 приведены кривые функции $B(v, \theta)$, где $\theta = \operatorname{arc\,tg} w$ (при пользовании этими кривыми следует иметь в виду, что при $y \gtrless 0$ величина $B \gtrless 0$).

Из исследования (4) вытекает, что при $q_0 < 0$ сразу после наполнения водохранилища образуется зона фильтрации воды из него в берега реки, распространяющаяся на весь верхний бьеф Oa (рис. 1, *I*, зона A, ограниченная линией $adea$). При этом в бесконечности возникает критическая точка (точка разветвления потока) d, в которой скорость фильтрации равна нулю.

В течение некоторого периода времени t_s точка d сначала удаляется от уреза водохранилища, а затем снова возвращается к нему. В этот период естественный грунтовый поток, встречая на своем пути противоположно направленное фильтрационное течение, претерпевает изгиб и отжимается к нижнему бьефу плотины. По истечении времени t_s зона фильтрации A уменьшает свою ширину (рис. 1, *II*, зона A, ограниченная линией $deOd$). При этом точка d движется вдоль уреза водохранилища, приближаясь к плотине. В это время естественный грунтовый поток разделяется на две зоны, в которых течение направлено к верхнему и нижнему бьефам (рис. 1, *II*, зоны B и C). Период времени t_s находится из (4) и будет:

$$t_s = \frac{[k(h_2^2 - h_1^2)]^2}{4\pi q_0^2 a}. \tag{6}$$

Для времени $t > t_s$ ширина зоны фильтрации из водохранилища, равная ординате точки d, выразится таким образом:

$$y_m = 2\lambda_m\sqrt{at}, \quad \lambda_m = f(\alpha), \quad \alpha = -\frac{4q_0\sqrt{\pi at}}{k(h_2^2 - h_1^2)}, \tag{7}$$

где $\lambda_m = f(\alpha)$ находится из графика рис. 2 (при пользовании графиком необходимо иметь в виду, что при $q_0 < 0$ величины $\alpha > 0$, а λ_m, $y_m < 0$).

Фильтрационный расход, поступающий из верхнего бьефа в зону обходной фильтрации A, будет:

$$Q = k(h_2^2 - h_1^2)[A(\lambda_0) - A(\lambda_m)] - q_0(y_m - y_0). \tag{8}$$

Здесь

$$A(\lambda)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lambda\,\mathrm{erfc}\,(\lambda)-\frac{1}{\pi}\left[e^{-\lambda^2}+\frac{1}{2}\mathrm{Ei}\,(-\lambda^2)\right]\right\},$$

$$\lambda_m=\frac{y_m}{2\sqrt{at}},\quad \lambda_0=\frac{y_0}{2\sqrt{at}}, \tag{9}$$

где y_0 — ордината точки пересечения обтекаемого контура плотины с урезом верхнего бьефа. Величину y_0 можно принять равной l/π, где l — длина обтекаемого контура сопряжения плотины с берегом реки.

При $t\to\infty$ все приведенные выше уравнения обращаются в формулы для расчета обходной фильтрации у плотин в условиях установившегося движения, предложенные автором ранее [2].

Рассматриваемую задачу можно распространить на случай разновременного наполнения (или опорожнения) верхнего и нижнего бьефов, что часто имеет место, например, на каналах со шлюзами. Допустим, что при $t=0$ глубина верхнего бьефа мгновенно изменяется от h_0 до h_2, затем при $t=t_1$ глубина нижнего бьефа мгновенно изменяется от h_0 до h_1, а в дальнейшем глубины h_2 и h_1 поддерживаются неизменными. Тогда при $t<t_1$ движение грунтовых вод у плотины (шлюза) будет определяться решением (4). При $t>t_1$ движение грунтовых вод должно удовлетворять начальному условию (4) при $t=t_1$ и граничным условиям (3). Решение для времени $t>t_1$ находится посредством наложения друг на друга двух линейных вихрей, начинающих непрерывно действовать в моменты времени $t=0$ и $t=t_1$. Это решение имеет вид:

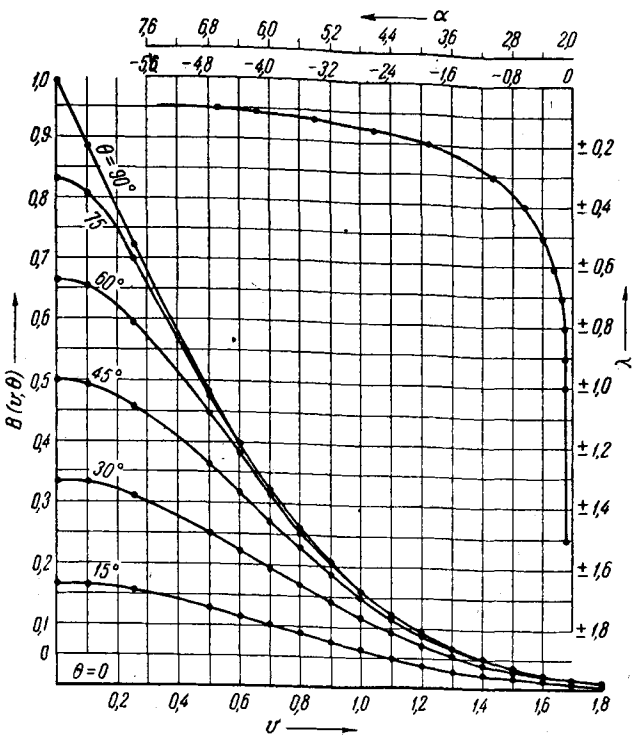


Рис. 2. Графики функций $B(v,\theta)$ и $\lambda(\alpha)$

$$h=\sqrt{h_e^2+\frac{1}{2}\{(h_2^2-h_0^2)[\mathrm{erfc}\,v-B(v,w)]+(h_1^2-h_0^2)[\mathrm{erfc}\,v_1+B(v_1,w)]\}}, \tag{10}$$

$$v=\frac{x}{2\sqrt{at}},\quad v_1=\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_1)}},\quad h_e^2=h_0^2-2\frac{q_0}{k}x,\quad w=\frac{y}{x}. \tag{11}$$

Если изменения уровней в обоих бьефах происходят одновременно, то в (11) $t_1=0$ и $v=v_1$. Если, кроме того, $q_0=0$ и $h_e=h_0$, то из (10) получается случай, рассмотренный иным методом в работе [5].

Решение (10) можно обобщить на случай колебания уровней воды в бьефах по произвольному наперед заданному графику зависимости глубины воды в бьефах от времени. Для этого следует воспользоваться предложенной мною аппроксимацией колебаний уровня воды на

границах потока $h = f(t)$ подходящим образом выбранной ступенчатой линией. Можно также применить аппроксимацию колебаний уровня $h = f(t)$ ломаной линией или отрезками парабол ([2]).

Интересно отметить, что при конечной скорости наполнения водохранилища до некоторого в дальнейшем постоянного уровня зона фильтрации воды из него A первоначально возникает у плотины, затем распространяется на весь верхний бьеф (до $-\infty$) и далее снова приближается к сооружению. При этом критическая точка d на урезе водохранилища сначала удаляется от плотины, а затем возвращается к ней, стремясь к стационарному положению, определяемому ординатой y_m при $t \to \infty$.

Аналогичные задачи могут быть рассмотрены в случае, когда область грунтового потока представляет собою полосу, ограниченную линией бьефов (рекой) и параллельной ей линией равного напора $h = h_3 = \text{const}$, находящейся на расстоянии L от линии бьефов. В этом случае для решения задачи необходимо разместить вдоль оси x бесконечное число непрерывно действующих линейных вихрей, отстоящих друг от друга на расстояние $2L$, и сложить вызванные ими течения с линейным потоком вдоль оси x, обусловленным мгновенным возрастанием напора на линии $x = 0$.

При залегании вблизи водоподпорных сооружений неоднородно-слоистых грунтов приведенные здесь частные решения плановой задачи могут быть видоизменены при помощи приближенных методов, изложенных в работах ([3],[4],[7]). Если вблизи плотины залегают напорные подземные воды (а не грунтовые воды со свободной поверхностью), то их движение будет описываться уравнением упругого режима, принципиально аналогичным равенству (1). В уравнении упругого режима удобно принять за неизвестную функцию вместо давления P произведение $2mH$, где H — пьезометрический напор, а m — мощность (толщина) пласта ($m = \text{const}$). Приравнивая $2mH$ и значение u по (1), получим формулу преобразования

$$h = \sqrt{2mH}. \qquad (12)$$

Подставляя в найденные выше решения вместо глубин потока h, h_1, h_2, h_0 их выражения через напоры H, H_1, H_2, H_0 по уравнению (12), получим аналогичные решения для упругого режима фильтрации. При этом изменяется также значение коэффициента пьезопроводимости a. Подобные решения для упругого режима могут быть применены не только при изучении движения грунтовых вод в берегах водохранилища (плановая задача), но и при исследовании фильтрации в основании гидросооружений (плоская задача). Представляет принципиальный интерес то обстоятельство, что при введении в рассмотрение упругих сил стабилизация течения под сооружениями замедляется и четко выявляется наблюдаемое в действительности запаздывание в изменении напоров грунтовой воды по сравнению с напорами в бьефах.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт ВОДГЕО

Поступило
16 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Веригин, ДАН, **66**, № 6 (1949). [2] Н. Н. Веригин, Гидротехн. строит., № 5 (1947); №№ 4 и 11 (1952). [3] Н. Н Веригин, Гидродинамические основы осушения приречных земель, Диссертация, ВОДГЕО, 1950. [4] П. Я. Полубаринова-Кочина, Теория движения грунтовых вод, 1952. [5] П. Я. Полубаринова-Кочина, Прикладн. матем. и мех., **13** (1949). [6] В. И. Аравин, С. Н. Нумеров, Теория движения жидкости в несжимаемой пористой среде, 1953. [7] Н. Н. Веригин, В. М. Шестаков, Методы расчета движения грунтовых вод в двухслойной среде, 1954.