

Г. Н. ПОВАРОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИНТЕЗА КОНТАКТНЫХ (1, k)-ПОЛЮСНИКОВ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 5 VI 1954)

1. Теория релейно-контактных схем (^{1, 2, 5}) позволяет математически исследовать синтез разных классов релейно-контактных схем.

В этой статье излагается разработанная автором математическая теория синтеза контактных (1, k)-полюсников с минимальным числом контактов*. Аналогичная теория построена К. Э. Шенноном (⁶) для контактных двухполюсников. В статье используются термины статьи (⁷).

2. Назовем последовательность k булевых функций n переменных (k, n)-рядом. Члены (k, n)-ряда β назовем β -функциями. Будем считать, что условия проводимости (1, k)-полюсника n переменных задаются (k, n)-рядом $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)$, причем f_i задает проводимость между входом и i -м выходом. Базис (k, n)-ряда есть его максимальная подпоследовательность, все члены которой не суть 0 и 1 и попарно различны. (k, h)-ряд, совпадающий со своим базисом, назовем B_{kn} -рядом. Число (k, n)-рядов равно 2^{k2^n} . Число B_{kn} -рядов равно $A_{22^n-2}^k$, причем $k \leq 2^{2^n} - 2$. Задача схемной реализации (k, n)-ряда сводится к задаче реализации его базиса, поэтому мы исследуем лишь B_{kn} -ряды. $L(k, n)$ есть такое наименьшее целое число, что любой (k, n)-ряд реализуется с $L(k, n)$ контактами и хотя бы один (k, n)-ряд не реализуется менее чем с $L(k, n)$ контактами. Сложность (k, n)-ряда есть отношение наименьшего числа контактов, с которым реализуется ряд, к $L(k, n)$.

3. Мы считаем, что схемы состоят из ветвей, полюсов и узлов. Ветвями служат контакты; каждая ветвь присоединена к двум узлам, и каждый полюс — к одному узлу (см. рис. 2)**. Два (p, q)-полюсника скелетно равносильны, если их можно перевести друг в друга взаимно однозначным переименованием ветвей и узлов (нумерация полюсов не изменяется) так, чтобы соседние ветви перешли в соседние ветви, соседние полюсы — в соседние полюсы, соседние ветви и полюсы — в соседние ветви и полюсы. Скелет (p, q)-полюсника определяется через абстракцию как класс скелетно равносильных (p, q)-полюсников. Полюсы коинцидентны, если они присоединены к одному и тому же узлу***.

* Замыкающий или размыкающий контакт считается за один контакт, переключающий — за два. Теория применима также к ($k, 1$)-полюсникам. Контактные (1, k)- и ($k, 1$)-полюсники широко применяются в релейно-контактных схемах для управления подачей тока от источников к промежуточно-исполнительным элементам.

** Ветви и узлы образуют граф (⁹). На рис. 2 часть узлов заменена короткими соединениями.

*** Э. Н. Гилберт (¹⁰), оценивая сверху число $G(N, K)$ скелетов N -полюсников, состоящих из K ветвей, учитывает только схемы без коинцидентных полюсов. Ввиду этого важная теорема VIII из (¹⁰) не может считаться доказанной.

Полюс, присоединенный к узлу, к которому не присоединена ни одна ветвь, назовем пустым, а схему без коинцидентных и пустых полюсов — примитивной.

Лемма 1. Число скелетов связных примитивных $(1, k)$ -полюсников, содержащих не более Q ветвей, меньше, чем $(4Q)^Q$.

Теорема 1. Для любых действительных чисел $\varepsilon, \delta \in (0, 1]$ и любого целого $T \geq 1$ найдется такое n_0 , что при $n > n_0$ и $k \leq T2^{2^{n-1}}$ число V_{kn} -рядов, требующих для своей реализации не более $(1-\varepsilon)k2^n / \log_2 k + n$ контактов, не превышает $\delta A_{2^{2^n-2}}^k$.

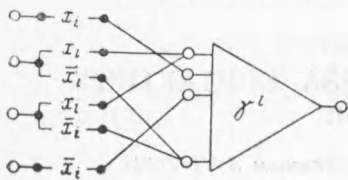


Рис. 1

Теорема 2. Для любого действительного $\varepsilon \in (0, 1]$ найдется такое n_0 , что если $n > n_0$ и $k \geq P = n[2n2^{2^{n-1}} + 2n(2n-2)2^{3 \cdot 2^{n-2}}]$, но $k \leq 2^{2^n} - 2$, то любой V_{kn} ряд требует не менее $(1-\varepsilon)^{3/2} k$ контактов.

Теорема 3. Начиная с некоторого n_0 , при $k < P$ хотя бы один V_{kn} -ряд требует не менее $3/2 k$ контактов.

4. Объединение результатов § 3 и результатов, полученных автором в статье (7), дает следующие теоремы:

Теорема 4. Для любых действительных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta \in (0, 1]$ и любого целого $T \geq 1$ найдется такое n_0 , что при $n > n_0$ и $k \leq T2^{2^{n-1}}$

$$(1 - \varepsilon_1) \frac{k2^n}{\log_2 k + n} < L(k, n) < (1 + \varepsilon_2) \frac{k2^{n+2}}{\log_2 k + n}$$

и лишь не более $\delta A_{2^{2^n-2}}^k$ из V_{kn} -рядов имеют сложность $\leq (1 - \varepsilon_2)^{1/4}$.

Теорема 5. Начиная с некоторого n_0 , при $k \in [2^{2^{n-1}}, P]$ всегда $3/2 k < L(k, n) < 4k$ и сложность любого V_{kn} -ряда $\geq 1/4$.

Теорема 6. Для любых действительных $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1]$ найдется такое n_0 , что если $n > n_0$ и $k \in [P, 2^{2^n} - 2]$, то $(1 - \varepsilon_1)^{3/2} k < L(k, n) < (1 + \varepsilon_2) 2k$ и сложность любого V_{kn} -ряда $\geq (1 - \varepsilon_2)^{3/4}$. При $k = 2^{2^n} - 2$ сложность любого V_{kn} -ряда есть 1.

5. Теорема 1 из (7), полученная автором, дает метод синтеза $(1, k)$ и $(k, 1)$ -полюсников, который можно назвать методом каскадов. Пусть дан V_{kn} -ряд β и β -функции зависят от $x_1, \dots, x_n$. Положим $\beta = \beta^{(0)}$, и если $0 < i < n$, то пусть $\gamma^{(i)}$ — последовательность коэффициентов разложения $\beta^{(i-1)}$ -функций по x_i на конstituенты единицы, а последовательность $\beta^{(i)}$ образуется из $\gamma^{(i)}$ выбрасыванием каждой функции, встречающейся второй раз. Тогда $\beta^{(n-1)}$ состоит из функций $0, 1, x_n$ — всех или части. Пусть схема $\mathfrak{S}^{(i)}$ реализует $\beta^{(i)}$, а схема $\{\mathfrak{S}^{(i)}\}$ получается из $\mathfrak{S}^{(i)}$ присоединением контактов переменной x_i согласно формулам разложения $\beta^{(i-1)}$ -функций на $\gamma^{(i)}$ -функции (см. рис. 1). В силу теоремы 1 из (7) схема $\{\mathfrak{S}^{(i)}\}$ реализует $\beta^{(i-1)}$. Если $\mathfrak{S}^{(n-1)} = \mathfrak{I}^{(n-1)}$, где $\mathfrak{I}^{(n-1)}$ — подходящая часть универсального многополюсника переменной x_n , и $\mathfrak{I}^{(i-1)} = \{\mathfrak{I}^{(i)}\}$, то $\mathfrak{I}^{(0)}$ реализует $\beta^{(0)} = \beta$. Число контактов в $\mathfrak{I}^{(0)}$, вообще говоря, зависит от порядка, в каком функции разлагаются по переменным.

Например, построим схему сравнения двоичных чисел. Пусть реле $A_n, \dots, A_1$ изображают двоичное число $\rho = a_n \dots a_1$, реле $B_n, \dots, B_1$ — двоичное число $\sigma = b_n \dots b_1$. Реле C должно сработать при $\rho < \sigma$, реле D — при $\rho > \sigma$. Пусть $f(a_n, \dots, a_1, b_n, \dots, b_1)$ — условия работы

для C . Тогда $f(b_n, \dots, b_1, a_n, \dots, a_1)$ — условия работы для D . Разложение дает:

$$f(a_j, \dots, a_1, b_j, \dots, b_1) = \bar{a}_j b_j + (\bar{a}_j \bar{b}_j + a_j b_j) f(a_{j-1}, \dots, a_1, b_{j-1}, \dots, b_1),$$

$$f(a_1, b_1) = \bar{a}_1 b_1.$$

По методу каскадов получим схему рис. 2 (где $n=5$). При помощи метода каскадов легко строится схема 2.11 из ⁽¹¹⁾ однотактного двоичного сумматора, работающего на сложение и вычитание, и многие другие практические схемы. Метод универсальных многополюсников ⁽⁷⁾ позволяет оценить сложность схем, получаемых по методу каскадов. Однако при практическом синтезе вместо метода универсальных многополюсников следует пользоваться методом каскадов.

Теорема 1 из ⁽⁷⁾ представляет собой развитие данных М. А. Гавриловым ^(2,3) критериев допустимых преобразований при последовательном многополюсном соединении*.

6. Итак, при $k \leq 2^{2^n-1}$ почти все B_{kn} -ряды требуют числа контактов порядка $L(k, n)$. Метод каскадов в основном решает задачу синтеза с минимумом контактов для этих B_{kn} -рядов, а также для B_{kn} -рядов при $k > 2^{2^n-1}$. Высокая сложность рядов связана с хаотическим подбором их членов. Условия проводимости практических схем закономерны и обычно входят в классы B_{kn} -рядов исчезающе малой сложности. Следуя М. А. Гаврилову ⁽⁴⁾, мы назовем такие схемы схемами упорядоченного типа. Изучение схем упорядоченного типа тесно связано с изучением систематики булевых функций ⁽⁸⁾.

Автором исследовались классы симметрических ⁽⁷⁾ и функционально разделимых ⁽⁸⁾ функций. При практическом синтезе симметрических схем вместо метода универсальных многополюсников следует применять метод каскадов. Последний можно применять и для функционально разделимых функций, используя функциональную разделимость, чтобы расположить переменные в наивыгоднейшем порядке (см. § 5, где $f(a_n, \dots, a_1, b_n, \dots, b_1)$ функционально разделима).

7. Схемы упорядоченного типа дает также класс особенных функций. Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ мы назовем особенной относительно x_i , если $f = \tilde{x}_i f' + f''$, где $\tilde{x}_i$ есть x_i или $\bar{x}_i$, а f' и f'' не зависят от x_i . Функцию, особенную хотя бы относительно одного аргумента, назовем особенной.

Теорема 7. Почти все функции неособенные**.

Функцию, особенную относительно каждого аргумента, назовем

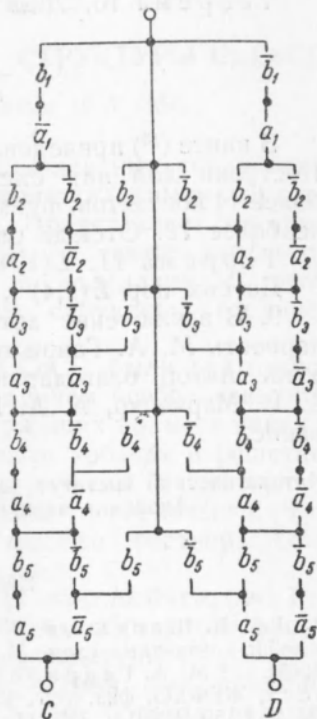


Рис. 2

* Теорема 1 из ⁽⁷⁾ объясняет ошибку А. Шваба ⁽¹²⁾. Схема 18 из ⁽¹²⁾ реализует $\bar{a}b(f_1 + f_3 f_2 f_4) + \bar{a}\bar{b}(f_2 + f_4 f_1 f_3) + \bar{a}\bar{b}(f_3 + f_1 f_4 f_2) + ab(f_4 + f_2 f_3 f_1)$, а не $\bar{a}b f_1 + \bar{a}\bar{b} f_2 + ab f_3 + ab f_4$.

** Т. е., $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Omega_n / 2^{2^n}) = 0$, где Ω_n — число особенных функций n переменных.

совершенно особенной. Функция, представимая выражением без инверсий, будет называться монотонно неубывающей*.

Теорема 8. *Функция является совершенно особенной тогда и только тогда, когда она одного типа — в смысле статьи (13) — хотя бы с одной монотонно неубывающей функцией.*

Теорема 9. *Любая функция, реализуемая с независимыми контактами**, является совершенно особенной; обратное неверно.*

8. Функции одного типа реализуются физически одинаковыми схемами (14). Поля (13) и Слепян (14) дали методы подсчета числа N_n типов функций n переменных. Оценок N_n , однако, не было. Между тем при помощи теоремы 13 из (6) может быть доказана

Теорема 10. *Для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n_0 ,*

$$\frac{2^{2^n}}{n! 2^n} < N_n < (1 + \varepsilon) \frac{2^{2^n}}{n! 2^n}.$$

В книге (15) приведена таблица типовых функций при $n = 4$ ($N_4 = 402$). Построив для них схемы, автор нашел, что функция 293 требует не более 14 контактов; функции 163, 205, 368 и 369 — не более 13; прочие — не более 12. Отсюда следует

Теорема 11. $L(1, 4) \leq 28$.

До сих пор $L(1, 4) \leq 30$ было лучшей оценкой (6).

9. В заключение автор считает приятным долгом выразить благодарность М. А. Гаврилову, под руководством которого проделана работа. Автор благодарен также С. А. Яновской, В. И. Шестакову, А. Р. Марченко, А. А. Шаврову и А. В. Кузнецову за помощь и внимание.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
4 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. И. Шестаков, ЖТФ, 11, № 6, 532 (1941). ² М. А. Гаврилов, Теория релейно-контактных схем, М.—Л., 1950. ³ М. А. Гаврилов, ДАН, 59, № 9, 1579 (1948). ⁴ М. А. Гаврилов, Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1109 (1945). ⁵ П. Эрнест, ЖРФХО, физ. отд., 42, отдел 2, № 10, 382 (1910). ⁶ С. Е. Шаппон, BSTJ, 28, № 1, 59 (1949). ⁷ Г. Н. Поваров, ДАН, 94, № 6, 1075 (1954). ⁸ Г. Н. Поваров, ДАН, 94, № 5, 801 (1954). ⁹ Л. Д. Кудрявцев, Усп. матем. наук, 3, № 4(26), 80 (1948). ¹⁰ E. N. Gilbert, BSTJ, 30, № 3, 668 (1951). ¹¹ Ann. Comp. Lab. Harvard Un., 24 (1949). ¹² H. Schwab, Ann. Télécomm., 7, № 1, 2 (1952). ¹³ G. Pólya, J. Sym. Log., 5, № 3, 98 (1940). ¹⁴ D. Slepian, Canad. J. Math., 5, № 2, 185 (1953). ¹⁵ Синтез электронных вычислительных и управляющих схем, пер. под ред. В. И. Шестакова, ИЛ, 1954. ¹⁶ J. C. C. McKinsey, Trans. Am. Math. Soc., 40, No. 3, 343 (1936).

* См. теорему 4 из (16).

** Т. е. схемой, в которой каждая переменная управляет не более чем одним контактом.