

Е. С. ФРАДКИН

О ЗАДАЧЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КВАНТОВЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком И. Е. Таммом 16 X 1954)

В последнее время большое внимание уделяется решению функциональных уравнений, определяющих S -матрицу взаимодействия ферми- и бозе-полей (¹⁻³). В этой связи нам представляется целесообразным обратить внимание на операторный вид решения указанных уравнений. Для простоты рассмотрим случай взаимодействия нуклонов с нейтральными псевдоскалярными мезонами (связь псевдоскалярная).

Система уравнений для ожидания S -матрицы в состоянии вакуума при $t = -\infty$ (обозначим его через Z) в этом случае имеет вид*:

$$\left\{ -i\gamma_\mu \partial_\mu + m + ig\gamma_5 \frac{\delta}{\delta J(x)} \right\} \frac{\delta Z}{\delta \eta(x)} = i\eta(x) Z; \quad (1)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(x)} \left\{ i\gamma_\mu \partial_\mu + m + ig\gamma_5 \frac{\delta}{\delta J(x)} \right\} = -i\bar{\eta}(x) Z; \quad (2)$$

$$(-\partial_\nu^2 + \mu^2) \frac{\delta Z}{\delta J(x)} = iJ(x) Z + ig \text{Sp} \gamma_5 \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta(x) \delta \bar{\eta}(x)}, \quad (3)$$

где $J(x)$ — источник мезонного поля; η и $\bar{\eta}$ — антикоммутирующие источники нуклонного поля.

При этом, когда $J = \eta = \bar{\eta} = 0$,

$$Z = 1, \quad \frac{\delta Z}{\delta \eta} = \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}} = \frac{\delta Z}{\delta J} = 0. \quad (4)$$

Решение системы уравнений (1) — (3) для случая свободных полей ($g = 0$) тривиально и имеет вид:

$$Z(g = 0) = Z_0 = \exp i \int \left\{ \bar{\eta}(x) S_F(x - y) \eta(y) + \frac{J(x)}{2} D_F(x - y) J(y) \right\} d^4x d^4y, \quad (5)$$

где

$$S_F(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ip(x-y)}}{\gamma p + m} d^4p, \quad D_F(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + \mu^2} d^4p. \quad (6)$$

* Здесь функциональные производные как по η , так и по $\bar{\eta}$ понимаются в смысле «слева» (²). Пользуясь случаем, отмечу, что в работе (²) в формулах (22) — (28) перед выражением $(\vec{k}^2 + \mu^2)$ пропущено i ; кроме того, в (28) необходимо $a^2(k)$ заменить выражением $a(k)a(-k)$.

Мы будем искать решение (1) — (3) при $g \neq 0$ в виде:

$$Z = AZ_0, \quad (7)$$

где A — оператор, зависящий от функциональных производных $\delta/\delta J$, $\delta/\delta\eta$, $\delta/\delta\bar{\eta}$.

После подстановки (7) в (1) — (3) получим следующие операторные соотношения для определения неизвестного A :

$$[A, \bar{\eta}(x)] = Ag \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \gamma_5; \quad (8)$$

$$[A, \eta(x)] = -Ag \gamma_5 \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(x)}; \quad (9)$$

$$[A, J(x)] = Ag \text{Sp} \gamma_5 \frac{\delta^2}{\delta \eta(x) \delta \bar{\eta}(x)}. \quad (10)$$

Из (8) — (10) следует:

$$A = \exp \int \left\{ g \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha(x)} \gamma_5 \frac{\delta}{\delta \eta_\beta(x)} \frac{\delta}{\delta J(x)} d^4 x \right\}. \quad (11)$$

Окончательно, учитывая (4), получим для Z решение:

$$CZ = \exp g \int \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \gamma_5 \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \frac{\delta}{\delta J(x)} d^4 x \exp i \int \left\{ \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y) + \right. \\ \left. + \frac{J(x) D_F(x-y) J(y)}{2} \right\} d^4 x d^4 y, \quad (12)$$

где C — постоянная, равная значению правой части (12) при $\eta = \bar{\eta} = J = 0$.

Легко убедиться, что в общем случае любого взаимодействия имеет место следующее правило нахождения оператора A в решении (7). Оператор A равен

$$A = \exp L_{\text{вз}}, \quad (13)$$

где $L_{\text{вз}}$ — лагранжиан взаимодействия, в котором $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $\varphi(x)$ заменены, соответственно, в том же порядке операторами $-i \frac{\delta}{\delta \eta(x)}$, $i \frac{\delta}{\delta \eta(x)}$, $-i \frac{\delta}{\delta J(x)}$.

В формуле (12) можно легко выполнить функциональное дифференцирование явно по переменным одного из взаимодействующих полей.

Так, используя свойства оператора смещения в пространстве $J(x)$, легко видеть, что после выполнения дифференцирования по мезонным переменным Z равен

$$CZ = \exp i \int \left\{ \left(J(x) + g \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha(x)} \gamma_5 \frac{\delta}{\delta \eta_\beta(x)} \right) \frac{D_F(x-y)}{2} \left(J(y) + \right. \right. \\ \left. \left. + g \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha(x)} \gamma_5 \frac{\delta}{\delta \eta_\beta(x)} \right) \right\} d^4 x d^4 y \exp i \int \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y) d^4 x d^4 y. \quad (14)$$

Из (13) можно также исключить функциональные производные по нуклонным переменным (η и $\bar{\eta}$). Однако проще получать такие решения непосредственно из системы (1) — (3).

Будем искать решение (1) — (3) в виде:

$$Z = \frac{1}{C} R \left(\eta, \bar{\eta}, \frac{\delta}{\delta J} \right) \exp \left\{ i \int J(x) \frac{D_F(x-y)}{2} J(y) d^4x d^4y \right\}, \quad (15)$$

где C — постоянная, которая определяется из условия (4).

Подставив (15) в (1) и (2), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\delta R}{\delta \bar{\eta}(x)} &= i \int G \left(x, y, \frac{\delta}{\delta J} \right) \eta(y) d^4y, \\ \frac{1}{R} \frac{\delta R}{\delta \eta(y)} &= -i \int \bar{\eta}(x) G \left(x, y, \frac{\delta}{\delta J} \right) d^4x, \end{aligned} \quad (16)$$

где $G \left(x, y, \frac{\delta}{\delta J} \right)$ — функция Грина электрона во внешнем поле $a(x)$ с последующей заменой $a(x)$ через $\frac{\delta}{\delta J(x)}$, причем $G(x, y, a)$ удовлетворяет уравнению:

$$[-\gamma_\mu \partial_\mu + m + ig\gamma_5 a(x)] G(x, y, a) = \delta(x - y). \quad (17)$$

Из (16) следует, что

$$R = \exp i \int \bar{\eta}(x) G \left(x, y, \frac{\delta}{\delta J} \right) \eta(y) d^4(x) d^4(y) R_1 \left(\frac{\delta}{\delta J} \right). \quad (18)$$

Оператор R_1 зависит лишь от $\delta/\delta J$ и определяется из уравнения (3). После подстановки (15) в (3) получим

$$\begin{aligned} [R, J] &= ig \operatorname{Sp} \gamma_5 \left[G \left(x, y, \frac{\delta}{\delta J} \right) + \right. \\ &\left. + i \int G \left(x, y, \frac{\delta}{\delta J} \right) \eta(y) d^4y \int \bar{\eta}(y) G \left(y, x, \frac{\delta}{\delta J} \right) d^4y \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая (18), получим,

$$[R_1, J] = R_1 ig \operatorname{Sp} \gamma_5 G \left(x, x, \frac{\delta}{\delta J} \right), \quad (20)$$

откуда для R_1 имеем*,

$$R_1 = \exp ig \int_0^1 d\lambda \operatorname{Sp} \gamma_5 G \left(x, x, \lambda \frac{\delta}{\delta J} \right) \frac{\delta}{\delta J(x)} d^4x. \quad (21)$$

* Заметим, что уравнение (17) может быть решено символически в виде

$$G \left(x, y, \frac{\delta}{\delta J} \right) = \frac{S_F}{1 + ig S_F \gamma_5 \frac{\delta}{\delta J}}, \text{ и тогда:}$$

$$ig \int_0^1 G \left(x, x, \frac{\delta}{\delta J} \right) d\lambda \frac{\delta}{\delta J(x)} = \ln \left(1 + ig S_F \gamma_5 \frac{\delta}{\delta J} \right),$$

где $\ln$ необходимо понимать также символически, в виде суммы бесконечного матричного ряда по заряду g .

Окончательно, из (15), (18), (21) имеем:

$$\begin{aligned}
 CZ = & \exp i \int \bar{\eta}(x) G\left(x, y, \frac{\delta}{\delta J}\right) \eta(y) d^4x d^4y \times \\
 & \times \exp ig \int_0^1 \text{Sp } \gamma_5 G\left(x, x, \lambda \frac{\delta}{\delta J}\right) d\lambda \frac{\delta}{\delta J(x)} d^4x \times \\
 & \times \exp \int iJ(x) \frac{D_F(x-y)}{2} J(y) d^4y d^4x,
 \end{aligned} \quad (22)$$

где C — нормировочная постоянная и равна значению правой части (22) при $\eta = \bar{\eta} = J = 0$.

Результаты, аналогичные приведенным, можно получить и непосредственно из решения функциональных уравнений (1)–(3), выраженного через бесконечнократные контурные интегралы ^(1,2), разлагая член взаимодействия в ряд и суммируя полученный бесконечный ряд.

В заключение автор приносит глубокую признательность акад. И. Е. Тамму, члену-корреспонденту АН СССР В. Л. Гинзбургу и В. Я. Файнбергу за ценное обсуждение полученных результатов.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
6 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, ДАН, 97, № 2, 209 (1954). ² Е. С. Фрадкин, ДАН, 98, № 1, 47 (1954). ³ R. E. Peierls, S. F. Edwards, Proc. Roy. Soc., 224, 24 (1954).