Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 5

ФИЗИКА

Б. М. СТЕПАНОВ

К ВОПРОСУ О ВВЕДЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 1 X 1954)

Как известно ([1-3]), состояние произвольной системы взаимодействующих волновых полей в промежуточном представлении задается при помощи амплитуды $\Phi(g)$, являющейся функционалом от известной «функции включения взаимодействия» $g(x)$. Функционал $\Phi(g)$ удовлетворяет уравнению Боголюбова

$$i\frac{\delta\Phi(g)}{\delta g_x} = \mathscr{L}(x\,|\,g)\,\Phi(g). \tag{1}$$

В частном случае, когда регулярная функция $g(x)$ заменяется разрывной функцией $0_\sigma(x)$, уравнение (1) переходит в уравнение Томонага — Швингера.

В теории взаимодействующих полей в промежуточном представлении невыясненным оставался вопрос о введении динамических переменных.

Попытаемся наметить метод построения динамических переменных $\mathscr{L}(x\,|\,g)$, $j^\nu(x\,|\,g)$ и т. д. Рассуждения удобно вести в общем виде, не конкретизируя природы динамической переменной. Обозначим через $A^{\alpha,\ldots,\beta}(x)$ любую динамическую переменную теории свободных частиц. Если индексы $(\alpha,\ldots,\beta)$ отсутствуют совсем, мы имеем инвариантную динамическую переменную, например, лагранжиан свободного поля. В случае одного индекса $A^\alpha(x)$ может обозначать, например, вектор изотопического тока свободных нуклеонов и т. д.

Переходя к полям взаимодействующим, заметим, что теперь динамическая переменная будет зависеть не только от точки x, но и от способа выключения взаимодействия, т. е. от поведения функции $g(x)$. В соответствии с этим запишем динамическую переменную в виде $A^{\alpha,\ldots,\beta}(x\,|\,g)$.

Перейдем к формулировке основных физических условий, которым должна удовлетворять развиваемая теория.

Когда взаимодействия вообще нет, т. е. $g(x)\equiv 0$, новая динамическая переменная должна переходить в соответствующую динамическую переменную из теории свободных полей. Иными словами,

$$A(x\,|\,0) = A(x). \tag{2}$$

Отсюда, в частности, следует, что оператор $A(x\,|\,g)$ обладает следующими трансформационными свойствами:

$$A^{\alpha,\ldots,\beta}(Lx\,|\,g) = \sum_{\ldots,\lambda)} g^{\alpha,\alpha}\ldots g^{\beta,\beta}\,\overline{L}_{\alpha,\varkappa}\ldots\overline{L}_{\beta,\lambda}\,\overset{*}{U}_L\,A^{\varkappa,\ldots,\lambda}(x\,|\,L^{-1}g)\,U_L. \tag{3}$$

Едва ли стоит особо упоминать о необходимости условия эрмитовости:

$$A(x|g) = A(x|\,\dot{g}). \tag{4}$$

Теперь следует сформулировать то обстоятельство, что динамические переменные удовлетворяют требованиям принципа причинности. Как известно, принцип причинности впервые выдвинут Штюкельбергом ([4]) и сформулирован в законченном виде Боголюбовым. Воспользуемся формулировкой, удобной для наших целей.

Пусть рассматриваемая система находится в состоянии с амплитудой $\Phi(g)$. Рассмотрим среднее значение оператора $A(x|g)$ по этому состоянию:

$$\bar{A}(x|g) = \langle \dot{\Phi}(g)\, A(x|g)\, \Phi(g) \rangle.$$

Ясно, что $\bar{A}(x|g)$ не может зависеть от поведения функции $g(y)$ в тех точках y, для которых либо $y^0 > x^0$, либо $(y-x)^2 < 0$, поскольку никакое событие в точке x не может быть поставлено в причинную зависимость от события в такой точке y. Иными словами,

$$\frac{\delta \bar{A}(x|g)}{\delta g_y} = 0 \quad \text{при} \quad y^0 > x^0 \quad \text{или} \quad (y-x)^2 < 0.$$

Это условие можно при помощи уравнения (1) представить в виде

$$\frac{\delta A(x|g)}{\delta g_y} = i\,[A(x|g);\, \mathscr{L}(y|g)] \quad \text{при} \quad y^0 > x^0 \text{ или } (y-x)^2 < 0. \tag{5}$$

Перейдем к формулировке условия локализуемости. Предположим на время, что функция $g(y) = 1$ до точки x и плавно убывает до нуля после точки x на протяжении слоя с временной длительностью Δt. Ясно, что теория локализуема, если в пределе $\Delta t \to 0$ на значение $A(x|g)$ влияет лишь состояние полей в непосредственной окрестности точки x. Сказанное позволяет сформулировать условие локализуемости в виде уравнения

$$\frac{\delta A(x|g)}{\delta g_y} = 0 \quad \text{при} \quad y^0 < x^0 \text{ или } (y-x)^2 < 0. \tag{6}$$

Покажем, что условиями (2) — (6) оператор $A(x|g)$ определяется однозначно. С этой целью допустим, что имеет место разложение, обычное для теории возмущений:

$$A(x|g) = A(x) + \sum_{(n\geqslant 1)} \frac{1}{n!} \int A_n(x, x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1) \ldots g(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{7}$$

где ядра $A_n(x, x_1, \ldots, x_n)$ можно без ограничения общности считать симметричными в аргументах $x_1, \ldots, x_n$. Расшифровывая перечисленные условия при помощи разложения (7), находим, что операторы $A_n(x, x_1, \ldots, x_n)$ должны удовлетворять таким условиям:

1°.
$$A_n^{\alpha,\ldots,\beta}(Lx, Lx_1, \ldots, Lx_n) =$$

$$= \sum_{(n,\ldots,\lambda)} g^{\alpha,\varkappa} \ldots g^{\beta,\beta}\, \bar{L}_{\alpha,\varkappa} \ldots \bar{L}_{\beta,\lambda}\, \dot{U}_L\, A_n^{\varkappa,\ldots,\lambda}(x, x_1, \ldots, x_n)\, U_L.$$

2^0. $$\dot{A}_n(x, x_1, \ldots, x_n) = A_n(x, x_1, \ldots, x_n).$$

3^0. $$A_{n+1}(x, x_1, \ldots, x_{n+1}) = i \sum_{(0 \leqslant k \leqslant n+1)} P\left(\frac{x_2, \ldots, x_{k+1}}{x_{k+2}, \ldots, x_{n+1}}\right) \times$$
$$\times [A_k(x, x_2, \ldots, x_{k+1}), \mathcal{L}_{n-k}(x_1, x_{k+2}, \ldots, x_{n+1})],$$

если при любом j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ $x_j^0 > x^0$ и $(x_j - x)^2 > 0$.

4^0. $$A_{n+1}(x, x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0,$$

если хотя бы для одного j $(j = 1, \ldots, n+1)$ $x_j^0 < x^0$ или $(x_j - x)^2 < 0$.

Как легко видеть, этим условиям можно удовлетворить (с точностью до произвольного квазилокального оператора) следующими формальными выражениями:

$$A_n(x, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= i^n \sum (x_1, \ldots, x_n) \theta(x_n^0 - x_{n-1}^0) \ldots \theta(x_1^0 - x^0) [A(x), \mathcal{L}(x_1), \ldots, \mathcal{L}(x_n)]. \quad (8)$$

Эти выражения можно регуляризовать, используя произвольность квазилокальных операторов, аддитивно входящих в (8). Не будем на этом останавливаться, так как есть более удобный способ построения $A(x|g)$, к изложению которого перейдем.

Пусть $J(x)$ обозначает достаточно регулярную функцию с теми же трансформационными свойствами, что и $A(x)$ [5]. Рассмотрим вспомогательный лагранжиан

$$\mathcal{L}_J(x) = \mathcal{L}(x) + (J(x) \cdot A(x)).$$

При помощи $\mathcal{L}_J(x)$ построим гамильтониан $H_J(x|g)$; тогда легко убедиться, что

$$A(x|g) = \left\{\frac{\partial H_J(x|g)}{\partial J(x)}\right\}_{J=0}. \quad (9)$$

Таким образом, имея регуляризованное выражение $H_J(x|g)$, мы сейчас же получаем регуляризованное выражение для $A(x|g)$.

Определим теперь обобщенную S-матрицу $S_J(g)$ при помощи уравнения

$$i \frac{\delta S_J(g)}{\delta g_x} = H_J(x|g) S_J(g).$$

Тогда, в силу (9), ясно, что

$$\mathfrak{A}(x|g) = A(x|g) S(g) = i \left\{\frac{\delta S_J(g)}{\delta (Jg)_x}\right\}_{J=0}. \quad (10)$$

$\mathfrak{A}(x|g)$ есть смешанное представление $A(x|g)$. В самом деле,

$$\langle \dot{\Phi}(g) A(x|g) \Phi(g) \rangle = \langle \dot{\Phi}(g) \mathfrak{A}(x|g) \Phi \rangle,$$

где Φ есть постоянная амплитуда, которая может быть названа начальной. При помощи (10) находим

$$\mathfrak{A}(x|g) = \sum_{(n \geqslant 0)} \frac{(-i)^n}{n!} \int T\{A(x) \mathcal{L}(x_1) \ldots \mathcal{L}(x_n)\} g(x_1) \ldots g(x_n) dx_1 \ldots dx_n. \quad (11)$$

Для фактического построения $A(x|g)$ удобно пользоваться формулой (11), так как она позволяет непосредственно применить технику регуляризации хронологических произведений, разработанную Н. Н. Боголюбовым.

Поступило
8 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов, ДАН, 81, № 5, 757 (1951). [2] Н. Н. Боголюбов, ДАН, 81, № 6, 1015 (1951). [3] Н. Н. Боголюбов, ДАН, 82, № 2, 217 (1952). [4] E. C. G. Stueckelberg, Phys. Rev., 81, No. 1, 130 (1951). [5] J. Schwinger, Proc. N. A. S., 37, No. 7, 452 (1951).