Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 5

ФИЗИКА

Ю. Б. РУМЕР

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ВТОРОГО РОДА У БОЗЕ-ГАЗА

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 9 XI 1954)

Недавно Б. Т. Гейликман (1) показал, что в присутствии поля тяготения у идеального бозе-газа температура начала эйнштейновской конденсации является точкой фазового перехода второго рода. Приведем здесь более общее рассмотрение этого вопроса.

Преобразуем выражение для числа частиц N, разлагая каждый член суммы в ряд:

$$N = \sum_{(k)} [\exp(\varepsilon_k - \zeta)/\theta - 1]^{-1} = \sum_{s=1}^{\infty} \exp(s\zeta/\theta) Z(s/\theta). \qquad (1)$$

Здесь мы ввели сумму состояний $Z(\lambda) = \sum_{(k)} \exp(-\lambda \varepsilon_k)$. Для простоты написания принято, что энергетические уровни дискретны и что каждый уровень в сумме фигурирует столько раз, сколько составляет кратность его вырождения. Сохраняя общность, мы можем принять, что $(\varepsilon_k)_{\min} = 0$.

Явление эйнштейновской конденсации заключается в следующем (2). При температуре θ_*, определяемой уравнением $N = \sum_{(s)} Z(s/\theta_*)$, химический потенциал ζ достигает своего максимального значения $\zeta_* = (\varepsilon_k)_{\min} = 0$. При дальнейшем понижении температуры он сохраняет постоянное значение $\zeta_* = 0$, а число частиц начинает убывать. Итак, при $\theta > \theta_*$ теплоемкость C должна вычисляться при постоянном N, а при $\theta < \theta_*$ — при постоянном ζ. Для скачка теплоемкости в точке $\theta = \theta_*$ получаем:

$$\Delta C = \theta_* \{(\partial S/\partial\theta)_N - (\partial S/\partial\theta)_\zeta\}_{\theta=\theta_*,\ \zeta=0}, \qquad (2)$$

где S — энтропия. Принимая во внимание

$$(\partial S/\partial\zeta)_\theta = k(\partial N/\partial\theta)_\zeta,$$

вычисляем:

$$\frac{\partial(S, N)}{\partial(\theta, \zeta)} \Big/ \frac{\partial(\theta, N)}{\partial(\theta, \zeta)} - \frac{\partial(S, \zeta)}{\partial(\theta, \zeta)} = -k \frac{[\partial N/\partial\theta)_\zeta]^2}{(\partial N/\partial\zeta)_\theta}.$$

В точке перехода $\theta = \theta_*$, $\zeta = 0$ имеем из (1)

$$(\partial N/\partial\theta)_\zeta = -\frac{1}{\theta_*} \sum_{(s)} (s/\theta_*) Z'(s/\theta_*),$$

$$(\partial N/\partial\zeta)_\theta = \sum_{(s)} (s/\theta_*) Z(s/\theta).$$

Принимая во внимание $N = \sum_{(s)} Z(s/\theta_*)$, можем записать окончательно:

$$\Delta C = -\frac{kN}{\theta_*} \frac{\left[\sum_{(s)} (s/\theta_*) Z'(s/\theta_*)\right]^2}{\left[\sum_{(s)} Z(s/\theta_*)\right]\left[\sum (s/\theta_*) Z(s/\theta_*)\right]}. \qquad (3)$$

Мы видим, что ΔC всегда отрицательно (λ-точка). Скачка теплоемкости может и не быть, если ряд $\sum_{(s)} (s/\theta_*) Z(s/\theta_*)$ расходится.

Рассмотрим два примера:

1. Газ свободных бозонов. Имеем [3]

$$Z(\lambda) = \left(\frac{2m\pi}{\lambda}\right)^{3/2} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}, \qquad (4)$$

и формула (3) дает:

$$\Delta C = -\frac{9}{4} kN \frac{\sum S^{-3/2}}{\sum S^{-1/2}}. \qquad (5)$$

Поскольку ряд в знаменателе расходится, имеем $\Delta C = 0$, и фазовый переход второго рода отсутствует.

2. Газ бесспиновых заряженных бозонов в магнитном поле. Имеем [3]

$$Z(\lambda) = \left(\frac{2m\pi}{\lambda}\right)^{3/2} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\mu H\lambda}{\operatorname{sh} \mu H\lambda}; \quad \mu = \frac{e\hbar}{2mc}. \qquad (6)$$

Вычисления по формуле (3) дают:

$$\Delta C = -\frac{1}{4} kN \frac{\left[\sum_{(s)} s^{-1/2} (1 + 2as \operatorname{cth} as)/\operatorname{sh} as\right]^2}{\left[\sum_{(s)} s^{-1/2}/\operatorname{sh} as\right]\left[\sum_{(s)} s^{1/2}/\operatorname{sh} as\right]}; \quad a = \frac{\mu H}{\theta_*}.$$

Поскольку ряд $\sum s^{1/2}/\operatorname{sh} as$ сходится, мы заключаем, что имеет место фазовый переход второго рода, причем величина скачка теплоемкости является универсальной функцией параметра $(\mu H/\theta_*)$.

Легко усмотреть, что пример, рассмотренный Б. Т. Гейликманом [1], также укладывается в изложенную схему.

Западно-Сибирский филиал
Академии наук СССР

Поступило
15 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Т. Гейликман, ЖЭТФ, 27, 118 (1954). [2] Л. Ландау, Е. Лифшиц, Статистическая физика, 1951, § 59. [3] Ю. Б. Румер, ЖЭТФ, 20, 807 (1950).