Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 5

ФИЗИКА

Е. М. ЛИФШИЦ

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА МОЛЕКУЛЯРНЫЕ СИЛЫ ПРИТЯЖЕНИЯ МЕЖДУ КОНДЕНСИРОВАННЫМИ ТЕЛАМИ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 30 IX 1954)

В предыдущем сообщении (1) были изложены результаты развитой автором теории молекулярных сил притяжения между конденсированными телами, относящиеся к случаю, когда температуру тел T можно считать равной нулю. Исходя из общей формулы, определяющей силу взаимодействия для произвольных расстояний между поверхностями, были, в частности, рассмотрены предельные случаи расстояний, малых и больших по сравнению с основными длинами волн λ, фигурирующими в спектре поглощения данных тел. В первом случае ($l \ll \lambda$) сила взаимодействия F дается формулой (3) в (1), а во втором ($l \gg \lambda$)— формулами (7)—(9).

При $l \ll \lambda$ условие, позволяющее пренебрегать влиянием температуры на силу взаимодействия, заключается, грубо говоря, в неравенстве $kT \ll \hbar\omega$, где $\omega \sim c/\lambda$. Для тех температур, о которых может идти речь у конденсированных тел, это условие, во всяком случае, выполняется, так что при вычислении F можно полагать $T = 0$.

На больших же расстояниях l влияние температуры может стать существенным. Характеристическая температура, связанная с длиной l, есть $\hbar c/kl$, и условие, позволяющее пренебречь температурой, есть, грубо говоря, $kT \ll \hbar c/l$. При достаточно малых l это условие слабее указанного выше, но при больших значениях l оно может нарушиться.

Возникает также вопрос о совместности условия $l \ll \hbar c/kT$ с условием $l \gg \lambda$. Всегда, конечно, существуют такие низкие температуры, при которых эти условия совместны и, следовательно, должны быть справедливыми предельные (для $l \gg \lambda$) законы, найденные в (1). Но, например, при комнатной температуре условия могут оказаться противоречащими друг другу, и тогда рассматривать взаимодействие на расстояниях $l \gg \lambda$, полагая при этом $T = 0$, вообще нельзя.

Вывод формулы, определяющей силы взаимодействия при произвольных, не равных нулю, температурах, основан на тех же общих представлениях о флуктуационном характере этих сил, которые были изложены в (1). Разница заключается лишь в том, что в формулах, определяющих средние квадраты флуктуационного поля, появляется в виде множителя планковская функция

$$\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2kT},$$

сводящаяся при $T = 0$ к $^1/_2$ (нулевые колебания поля). Функция $\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2kT}$ имеет бесконечное множество полюсов, расположенных на мнимой оси ω и равных

$$\omega_n = i\xi_n = i\frac{2\pi kT}{\hbar}n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Это обстоятельство очень существенно при преобразованиях комплексного интеграла, определяющего силу F.

Мы приведем здесь окончательные результаты вычислений. Для упрощения записи формул будем предполагать оба тела одинаковыми. Общая формула для силы взаимодействия гласит:

$$F = \frac{kT}{\pi c^3} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \int_1^\infty p^2 \xi_n^3 \left\{ \left[\left(\frac{s_n + p}{s_n - p} \right)^2 e^{2p\xi_n l/c} - 1 \right]^{-1} + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{s_n + \varepsilon_n p}{s_n - \varepsilon_n p} \right)^2 e^{2p\xi_n l/c} - 1 \right]^{-1} \right\} dp, \qquad (2)$$

$$s_n = \sqrt{\varepsilon_n - 1 + p^2}, \quad \varepsilon_n = \varepsilon(i\xi_n)$$

(все обозначения те же, что в [1]); штрих у знака суммы означает, что член с $n = 0$ должен быть взят с половинным весом.

Эта формула позволяет, принципиально, вычислить силу F при любых значениях l и любой температуре. Мы видим, что и при $T \neq 0$ для этого достаточно знать значения функции $\varepsilon(i\xi)$.

При $T \to 0$ интервалы между значениями ξ_n тоже стремятся к нулю, суммирование по n можно заменить интегрированием по $d\xi$, и мы возвращаемся к формуле (1) в [1], не содержащей температуры. Поправочные члены к этой формуле можно найти, исходя из точного выражения (2), воспользовавшись известной формулой суммирования Эйлера:

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' f(n) = \int_0^\infty f(n)dn + \frac{1}{12} f'(0) - \frac{1}{30 \cdot 4!} f'''(0) + \ldots,$$

где $f(n)$ — функция, обращающаяся при $n \to \infty$ в нуль вместе со всеми своими производными. В данном случае роль этой функции играет интеграл, стоящий в (2) под знаком суммирования. Для взаимодействия двух металлов можно произвести вычисления, воспользовавшись, как и в (1), для $\varepsilon(\omega)$ выражением $\varepsilon = -4\pi e^2 N/m\omega^2$ (N — плотность числа свободных электронов). При вычислении l предполагается малым по сравнению с $\hbar c/kT$, но все же большим по сравнению с характерной для металла «длиной волны» $\frac{c}{e}\sqrt{\frac{m}{N}}$. Тогда получаем:

$$F = \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{l^4} \left[1 - \frac{48}{9} \left(\frac{lkT}{\hbar c} \right)^4 \right]. \qquad (3)$$

Так, при комнатной температуре поправочный член мал уже если $l < 5$ μ. В [1] же была получена оценка $l \gg 0{,}5$ μ как условие применимости формулы $F = \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{l^4}$. Мы видим, что при комнатной температуре область применимости хотя и узка, но все же существует.

В обратном предельном случае больших значений $lkT/\hbar c$ из всех членов суммы в (2) надо сохранить лишь первый ($n = 0$). Введя предварительно в интеграле новую переменную $x = \frac{4\pi lkT}{\hbar c} pn$ вместо p, получим:

$$F = \frac{kT}{16\pi l^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\left(\frac{\varepsilon_0 + 1}{\varepsilon_0 - 1} \right)^2 e^x - 1} \qquad (4)$$

ε_0 — электростатическое значение диэлектрической постоянной). С практически достаточной точностью можно написать

$$F = \frac{kT}{8\pi l^3}\left(\frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 1}\right)^2. \qquad (5)$$

Все следующие члены суммы в (2) при больших $\frac{lkT}{\hbar c}$ убывают экспоненциально. Таким образом, на достаточно больших расстояниях убывание силы взаимодействия замедляется и снова (как и при $l \ll \lambda$) происходит по закону $1/l^3$; коэффициент в этом законе зависит теперь от температуры и от электростатической диэлектрической постоянной. Это обстоятельство, повидимому, до сих пор в литературе никем не было отмечено.

Выражаю искреннюю благодарность акад. Л. Д. Ландау за обсуждение рассмотренных здесь вопросов.

Институт физических проблем им. С. И. Вавилова
Академии наук СССР

Поступило
30 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. М. Лифшиц, ДАН, **97**, 643 (1954).