Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. А. КИСЕЛЕВ

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ СИЛ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 VII 1954)

1. Исследованию общих нелинеаризированных уравнений Навье — Стокса для случая нестационарного течения несжимаемой жидкости посвящен ряд работ; из них наиболее фундаментальными являются работы Лерэ ([1-3]). Однако вопрос о существовании решений краевых задач полностью не исследован. В работе ([3]) рассмотрена краевая задача для случая двух пространственных переменных. Решение ее ищется по методу последовательных приближений как предел решений линейных уравнений и доказывается, что такой предел существует, во всяком случае, для некоторого промежутка времени t. Вопрос же о том, когда эта предельная функция имеет те или иные производные и удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса, не выяснен.

В работе Д. Е. Долидзе ([4]) решение краевой задачи ищется так же как и в работе ([3]), методом последовательных приближений, но доказательство сходимости ошибочно.

В данной работе мы даем способ решения краевой задачи в цилиндре $Q = \Omega \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, где Ω — ограниченная область изменения (x_1, x_2), а T есть положительная постоянная, зависящая от Ω, начальных условий и массовых сил, действующих на жидкость. Если массовые силы имеют потенциал и начальные возмущения невелики, то $T = \infty$, и решение при $t \to \infty$ равномерно по (x_1, x_2) стремится к нулю.

2. Указанная в п. 1 задача сводится известным образом к решению уравнения

$$L\psi \equiv \frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} - \nu\Delta^2\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_2} = f \qquad (1)$$

(ν — коэффициент вязкости) в конечной области Ω плоскости (x_1, x_2) при начальном условии

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x_1, x_2) \qquad (2)$$

и граничных условиях

$$\psi|_S = \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = 0 \quad \text{при } t \geqslant 0. \qquad (3)$$

Прежде всего обобщим понятие решения этой задачи. Назовем непрерывную функцию $\psi(x_1, x_2, t)$ обобщенным решением задачи (1), (2), (3) в цилиндре $Q = \Omega \times [0, T]$, если: а) она и ее обобщенная первая производная по t имеют квадратично суммируемые по Q обобщенные производные по x_1 и x_2 до второго порядка включительно; б) ψ удовлетворяет условиям (2) и (3); в) ψ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_a \left\{ \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \nu\Delta\psi\,\Delta\Phi + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Delta\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Delta\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + f\Phi \right\} dQ = 0 \qquad (4)$$

для любой дважды непрерывно дифференцируемой по x_i функции Φ, удовлетворяющей условиям (3). Такое расширение понятия решения законно в том смысле, что, с одной стороны, классическое решение обладает свойствами (а), (б) и (в), с другой стороны, мы доказываем, что задача может иметь не более одного обобщенного решения. Точнее, если имеются два обобщенных решения, соответствующие свободному члену f и начальной функции ψ_0, причем $\partial\psi_0/\partial x_i$ ограничены в Ω, то эти решения совпадают, по крайней мере, в цилиндре $Q_1 = \Omega \times [0, t_1]$ некоторой высоты t_1. Если же $\int\limits_\Omega (\Delta\psi)^2\, d\Omega$ для одного из решений не превосходит для $t \in [0, T]$ некоторой постоянной, зависящей лишь от ν и размеров области, то решения совпадают во всем цилиндре Q.

Переходим теперь к построению обобщенного решения. Предположим, что для ψ_0 существует $\Delta^2\psi_0$, $\int\limits_\Omega (\Delta^2\psi_0)^2\, d\Omega < \infty$ и ψ_0 удовлетворяет условиям (3). Ради некоторых непринципиальных упрощений мы будем считать здесь, что f, $\partial f/\partial t$ и все производные ψ_0, входящие в $L\psi_0$, непрерывны. Введем вместо ψ новую неизвестную функцию v при помощи равенства $v = \psi - \psi_0$. Тогда

$$Mv \equiv Lv + \frac{\partial\psi_0}{\partial x_2}\frac{\partial\Delta v}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_0}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta v}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x_2} = -L\psi_0 + f \equiv f_1, \qquad (5)$$

причем $v|_S = \partial v/\partial n|_S = 0$ и $v|_{t=0} = 0$. Для нахождения v используем конечные разности. Именно, пространство x_1, x_2, t разобьем плоскостями $x_i = k_i h$, $t = m\Delta t$ (k_i, $m = 0, \pm 1, \ldots$). Обозначим область, составленную из элементарных квадратов, принадлежащих Ω, через Ω_h, а границу Ω_h через S_h. Уравнение (5) заменим разностным следующим образом:

$$M_h v \equiv \Delta_h v_t - \nu\Delta_h^2 sv + {}^1/_2\, sv_{x_2}A_{\bar{x}_1} + {}^1/_2\, sv_{\bar{x}_2}A_{\bar{x}_1}^{-x_2} - {}^1/_2\, sv_{x_1}A_{\bar{x}_2} - {}^1/_2\, sv_{\bar{x}_1}A_{\bar{x}_2}^{-x_1} + \psi_{0x_2}\Delta_h sv_{\bar{x}_1} - \psi_{0x_1}\Delta_h sv_{\bar{x}_2} = f_1. \qquad (6)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $v_{x_1}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{h}[v(x_1 + h, x_2, t) - v(x_1, x_2, t)]$; $v_{\bar{x}_1}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{h}[v(x_1, x_2, t) - v(x_1 - h, x_2, t)]$; $\Delta_h v = \sum\limits_{i=1}^{2} v_{x_i\bar{x}_i}$; $sv(x_1, x_2, t) = {}^1/_2\, v(x_1, x_2, t + \Delta t) + {}^1/_2\, v(x_1, x_2, t)$; $v^{-x_1}(x_1, x_2, t) = v(x_1 - h, x_2, t)$; наконец, $A = \Delta_h(sv^{-t} + \psi_0)$.

Определим функцию v_h (в дальнейшем мы ее будем обозначать просто v) из следующих условий: она равна нулю на S_h и вне Ω_h для всех $t = k\Delta t$ ($k = -1, 0, 1, \ldots$), равна 0 на Ω_h при $t = 0$ и $-\Delta t$ и удовлетворяет алгебраической системе (6) для всех точек решетки, принадлежащих $\Omega_h - S_h$ при $t = k\Delta t$ ($k = 0, 1, \ldots$). Мы показываем, что v_h однозначно определяется из перечисленных условий и что в пределе при h и $\Delta t \to 0$ v_h дает искомое решение. Для этих целей мы показываем, что v_h подчинены двум неравенствам, к краткому выводу которых мы сейчас и перейдем.

3. Составим для произвольного $t = k\Delta t$ сумму

$$-h^2 \sum_{\Omega_h} f_1 \cdot sv = -h^2 \sum_{\Omega_h} M_h \cdot sv.$$

В результате суммирования нелинейные члены из $M_h v$ пропадут, и мы получим

$$h^2 \sum_{\Omega_h} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} [(v_{x_i})^2]_t + \nu (\Delta_h s v)^2 \right\} =$$

$$= h^2 \sum_{\Omega_h} \{ [- (sv \cdot \psi_{0x_2})_{x_1} + (sv \cdot \psi_{0x_1})_{x_2}] \Delta_h sv - f_1 sv \}. \qquad (7)$$

Введем обозначения:

$$\varphi_1^2(k) = h^2 \sum_{\Omega_h} \sum_{i=1}^{2} (v_{x_i})^2, \quad \varphi^2(k) = h^2 \sum_{\Omega_h} (\Delta_h sv)^2,$$

$$F_1^2(k) = h^2 \sum_{\Omega_h} \sum_{i=1}^{2} (v_{x_i t})^2, \quad F^2(k) = h^2 \sum_{\Omega_h} \sum_{i,\, j=1}^{2} (sv_{x_i x_j t})^2,$$

причем суммы, стоящие справа, вычислены при $t = k\Delta t$. Выражение, стоящее справа в (7), мы преобразуем и затем оцениваем, используя неравенство Коши и неравенство типа теоремы вложения

$$h^2 \sum_{\Omega_h} v^2 \leqslant c_1 h^2 \sum_{\Omega_h} (\Delta_h v)^2.$$

В результате из (7) получим

$$(\varphi_1^2(k))_t + \nu \varphi^2(k) \leqslant c_2 \left[h^2 \sum_{\Omega_h} f_1^2(k\Delta t) + \varphi_1^2(k+1) + \varphi_1^2(k) \right], \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad (8)$$

откуда, в свою очередь, придем к заключению, что

$$\varphi_1^2(p) \leqslant c_3 \Delta t h^2 \sum_{k=0}^{p} \sum_{\Omega_h} f_1^2(k\Delta t). \qquad (9)$$

Постоянные c_k, входящие в полученные выше неравенства, зависят лишь от $\max |\partial \psi_0 / \partial x_i|$ и от размеров области Ω, а c_3 — и от высоты $p\Delta t$, но не зависят от явно указанных в этих неравенствах функций и от величин h и Δt. Кроме того неравенства (8) и (9) справедливы при любой функции A, входящей в уравнение (6), так как члены, содержащие A, пропадают в результате суммирования по Ω_h. Это последнее обстоятельство вместе с неравенством (8) дает возможность доказать, что система (6), линейная на каждом шаге $k\Delta t$, однозначно разрешима при любой функции f_1.

4. Переходим к выводу второго, основного неравенства. Для этого составим сумму

$$- h^2 \sum_{\Omega_h} (M_h v)_t sv_t = - h^2 \sum_{\Omega_h} f_{1t} \cdot sv_t.$$

В результате ряда преобразований и оценок приходим к неравенству

$$(F_1^2(k))_t + \nu F^2(k) \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \left[F(k) F(k-1) \varphi(k) + F_1^2(k+1) + F_1^2(k) + h^2 \sum_{\Omega_h} (f_{1t})^2 \right]. \qquad (10)$$

Просуммируем обе части этого неравенства по k от 0 до p и введем обозначения $\mu(p) = \Delta t \sum_{k=0}^{p} F_1^2(k)$ и $\eta(p) = \Delta t \sum_{k=0}^{p} F^2(k)$. Так как $\varphi(k) \leqslant \leqslant \sqrt{k\Delta t}\,\eta(k-1)$, то из (10) получим:

$$\mu_t(p) + (\nu - c_4\sqrt{p\Delta t}\,\eta(p-1))\,\eta^2(p) \leqslant 2c_4\mu(p+1)\,0(p),$$

где $0(p) = F_1^2(0) + c_4\Delta t h^2 \sum_{k=0}^{p} \sum_{\Omega_h} (f_{1t})^2$.

Из этого неравенства, учитывая монотонный характер изменения $\mu(p)$ и $\eta(p)$ и то, что $\mu(0) = \eta(0) = 0$, мы доказываем существование числа t_1 (оно явно вычисляется через известные величины c_i и 0), обладающего следующим свойством: для всех $p \leqslant [t_1/\Delta t]$ имеет место оценка

$$\eta(p) \leqslant B, \tag{11}$$

где B определяется через c_i и 0 и не зависит от h и Δt.

Неравенство (11) позволяет сделать все необходимые предельные переходы и доказать, что v_h сходятся равномерно к искомому обобщенному решению, подобно тому как это сделано О. А. Ладыженской ([5], гл. I и III) для линейных гиперболических уравнений. Так же как и в [5], можно, используя конечные разности, исследовать дифференциальные свойства обобщенного решения и установить, при каких условиях оно будет классическим решением.

Если в (1) $f = 0$ (т. е. массовые силы имеют потенциал) и если некоторое интегральное выражение, которое естественно назвать обобщенным числом Рейнольдса, меньше единицы, то мы можем аналогичным методом, лишь не сводя начальные условия к однородным, доказать существование обобщенного решения для всех $t \geqslant 0$. Это решение удовлетворяет тождеству (4) при любом $T > 0$. Полагая в (4) $\Phi = \psi$, получим

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad}^2 \psi\, d\Omega \Big|_{t=0}^{t=T} + 2\nu \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta\psi)^2\, d\Omega\, dt = 0. \tag{12}$$

Кроме того, мы устанавливаем, что

$$\int_0^{\infty} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t}\right)^2 d\Omega\, dt < \infty. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что $\psi \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно относительно $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$.

Ленинградский государственный
педагогический институт

Поступило
27 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Leray, J. Math. pures et appl., s. IX, 12 (1933). [2] J. Leray, ibid., s. IX, **13**, 331 (1934). [3] J. Leray, Acta Math., **63**, 193 (1934). [4] Д. Е. Долидзе, Прикладн. матем. и мех., **12**, в. 2 (1948). [5] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, 1953.