Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. Г. ЧЕРНЫЙ

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗРЫВА. ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ С ПРОСАЧИВАНИЕМ ЖИДКОСТИ СКВОЗЬ ЕЕ ПОВЕРХНОСТЬ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 27 XI 1954)

В настоящей заметке приведены соотношения между параметрами потока на поверхности разрыва, расположенной внутри пограничного слоя. Дан пример решения задачи о пограничном слое при отсутствии протекания массы сквозь поверхность разрыва.

Рассмотрим течения жидкости (или газа), при которых в тонком слое вблизи обтекаемой поверхности физико-химические свойства жидкости резко отличаются от ее свойств во внешнем потоке. Ограничиваясь рассмотрением плоско-параллельных ламинарных движений, будем определять положение точки M в потоке длиной $\bar{x}$ дуги ON обтекаемого контура (O — начало отсчета) и длиной $\bar{y}$ отрезка NM нормали к контуру. Пусть β — угол между линией разрыва (отделяющей пристеночный слой от внешнего потока) и касательной к контуру при одинаковых значениях $\bar{x}$; $\bar{D}$ — нормальная скорость распространения поверхности разрыва; $\bar{u}$ и $\bar{v}$ — составляющие скорости в направлениях $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Преобразуем к введенным криволинейным координатам соотношения на поверхности разрыва (1) и перейдем в них к новым переменным $\bar{x} = lx$, $\bar{y} = l\,\mathrm{Re}^{-1/2} y$, $\bar{u} = Vu$, $\bar{v} = V\,\mathrm{Re}^{-1/2} v$, $\bar{D} = V\mathrm{Re}^{-1/2} D$, где l и V — постоянные с размерностью длины и скорости, $\mathrm{Re} = \rho_0 Vl/\mu_0$; ρ_0 и μ_0 — характерные значения плотности и коэффициента вязкости. Полагая $\mathrm{Re} \to \infty$, как при выводе уравнений пограничного слоя, данном Мизесом (2), получим предельную форму соотношений на поверхности разрыва в виде

$$\rho_1 (D - v_1 + u_1 \operatorname{tg}\beta) = \rho_2 (D - v_2 + u_2 \operatorname{tg}\beta); \quad p_1 = p_2;$$

$$\rho_1 (D - v_1 + u_1 \operatorname{tg}\beta)\, u_1 + \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \rho_2 (D - v_2 + u_2 \operatorname{tg}\beta)\, u_2 + \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_2; \tag{1}$$

$$\rho_1 (D - v_1 + u_1 \operatorname{tg}\beta)\left(\varepsilon_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) + \frac{p_0}{\rho_0 V^2} p_1 (u_1 \operatorname{tg}\beta - v_1) + \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 +$$

$$+ \frac{k_0 T_0}{\mu_0 V^2}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)_1 = \rho_2 (D - v_2 + u_2 \operatorname{tg}\beta)\left(\varepsilon_2 + \frac{u_2^2}{2}\right) +$$

$$\frac{p_0}{\rho_0 V^2} p_2 (u_2 \operatorname{tg}\beta - v_2) + \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + \frac{k_0 T_0}{\mu_0 V^2}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)_2.$$

Здесь ρ, p, T, μ и k — отнесенные к некоторым характерным значениям плотность, давление, температура и коэффициенты вязкости и теплопроводности; εV^2 — внутренняя энергия единицы массы; $\operatorname{tg}\beta = dy/dx$, где dx и dy взяты вдоль линии разрыва; индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к значениям величин с внешней и с внут-

ренней сторон поверхности разрыва. Последнее из соотношений (1 (уравнение энергии) можно также привести к виду

$$\rho_1 (D - v_1 + u_1 \operatorname{tg}\beta)\left(\frac{i_1}{V^2} + \frac{u_1^2}{2}\right) + \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + \frac{k_0 T_0}{\mu_0 V^2}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)_1 =$$

$$= \rho_2 (D - v_2 + u_2 \operatorname{tg}\beta)\left(\frac{i_2}{V^2} + \frac{u_2^2}{2}\right) + \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + \frac{k_0 T_0}{\mu_0 V^2}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)_2,$$

где i — теплосодержание единицы массы. Если поток массы сквозь поверхность разрыва отсутствует, условия (1) принимают вид

$$v_1 - u_1 \operatorname{tg}\beta = v_2 - u_2 \operatorname{tg}\beta = D; \quad p_1 = p_2; \quad \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_2;$$

$$\left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + \frac{k_0 T_0}{\mu_0 V^2}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)_1 = \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + \frac{k_0 T_0}{\mu_0 V^2}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)_2. \tag{2}$$

При предельном переходе, проделанном для вывода соотношений (1) на поверхности разрыва, уравнения движения жидкости (газа) сводятся к уравнениям пограничного слоя

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{p_0}{\rho_0 V^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0; \tag{3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) = \frac{k_0 T_0}{\mu_0 V^2}\frac{\partial}{\partial y}k\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{p_0 p}{\rho_0 V^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

которые должны выполняться в каждой из областей, отделенных поверхностью разрыва;

Уравнения состояния и зависимости ε, μ и k от температуры (и давления) могут быть различными по обе стороны поверхности разрыва, функция же $p(x, t)$ вследствие равенства $p_1 = p_2$ одна и та же для обеих систем уравнений (3).

Решение во внешней области должно удовлетворять обычным условиям теории пограничного слоя: при $y \to \infty$ $u = u_\infty(x, t)$, $T = T_\infty(x, t)$; решение во внутренней области — условиям на обтекаемой поверхности: при $y = 0$ $u = u_0(x, t)$, $v = v_0(x, t)$, $T = T_{ст}(x, t)$ (или другим, эквивалентным). Оба решения должны соединяться на поверхности разрыва посредством соотношений (1) в случае $D \neq v_n$ и (2) в случае $D = v_n$.

Условия на поверхности разрыва, полученные из законов сохранения массы, количеств движения и энергии, вместе с обычными условиями в бесконечности и на обтекаемой поверхности при учете вязкости и теплопроводности жидкости не определяют решения единственным образом. Для однозначного определения решения нужно наложить дополнительные требования на характер течения или ввести дополнительные условия на поверхности разрыва. Эти требования и условия могут быть различными в разных конкретных задачах.

Рассмотрим для примера установившееся обтекание газом плоской пластины, сквозь поверхность которой в поток вводится газ (или жидкость) с другими свойствами (при одинаковых свойствах обоих газов эта задача решена в работе [3]). Газ будем считать либо несжимаемым либо совершенным с постоянными теплоемкостями. При сделанных предположениях ($D = 0$, $\partial/\partial t = 0$, $p = \text{const}$) система уравнений (3) приобретает вид

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0;$$

$$\rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial T}{\partial y} + m^2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{4}$$

Здесь $\mathrm{Pr} = c_p\mu / k = \text{const}$; $m^2 = V^2 / c_p T_0$; c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Примем за масштабы скорости, температуры, плотности и коэффициента вязкости их значения в набегающем потоке в бесконечности. Тогда при $y \to \infty$ $u = 1$, $T = 1$; при $y = 0$ $u = 0$, $v = v_0(x)$, $T = T_{\text{ст}}$. Число этих условий и условий (2) на поверхности раздела равно 9. Каждая из систем (4) имеет 5-й порядок; форма поверхности разрыва также неизвестна и должна определиться при решении задачи. Поэтому для однозначного определения решения необходимы еще два условия. В качестве этих двух условий естественно требовать непрерывность скорости и температуры на поверхности раздела: $u_1 = u_2$, $T_1 = T_2$.

Решая задачу методом Блазиуса, положим $\rho u = \varphi'(\zeta)$, $\rho v = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times$ $\times (\zeta\varphi' - \varphi)$, $T = T(\zeta)$, где $\zeta = \frac{y}{\sqrt{x}}$ (при этом должно быть $v_0\sqrt{x} = \text{const}$).

Уравнения пограничного слоя сводятся тогда к обыкновенным дифференциальным уравнениям для определения $\varphi(\zeta)$ и $T(\zeta)$. Перейдя в них к новой искомой функции $\omega = \mu \frac{du}{d\zeta}$ и новому независимому переменному u, получаем

$$\frac{d^2\omega}{du^2} + \rho\mu \frac{u}{2\omega} = 0; \qquad \frac{d^2T}{du^2} + (1 - \mathrm{Pr}) \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{du} \frac{dT}{du} + m^2 \mathrm{Pr} = 0.$$

Граничными условиями для этих систем уравнений являются:

$$\omega_2'(0) = \frac{C}{2}, \qquad T_2(0) = T_{\text{ст}},$$

$$\frac{k_1}{\mu_1} T_1'(u^*) = \frac{k_2}{\mu_2} T_2'(u^*), \quad \omega_1'(u^*) = 0, \quad \omega_2'(u^*) = 0,$$

$$\omega_1(u^*) = \omega_2(u^*), \quad T_1(u^*) = T_2(u^*), \quad \omega_1(1) = 0, \quad T_1(1) = 1;$$

$C / \sqrt{\mathrm{Re}}$ — отношение массового расхода жидкости сквозь пластинку длиной l к расходу $\rho_0 V l$; u^* — скорость на поверхности раздела.

Пусть $\rho\mu = \text{const}$ (т. е. для несжимаемой жидкости $\mu = \text{const}$, для совершенного газа $\mu \sim T$). Тогда функции $\omega(u)$ и величину u^* можно найти независимо от T, после чего $u(\zeta)$ и $T(\zeta)$ определяются квадратурами. Легко показать, что решение уравнения

$$\frac{d^2\omega}{du^2} + \frac{u}{2\omega} = 0, \tag{5}$$

удовлетворяющее условиям $\omega(u^0) = \omega^0 > 0$, $\omega'(u^0) = \omega^1$ при $u^0 \geqslant 0$, можно продолжить до точки $u = u_0$, где оно обратится в нуль. При этом, если $\omega^1 > 0$, то $\omega(u)$ имеет между u^0 и u_0 максимум, если $\omega^1 \leqslant 0$, то $\omega(u)$ с ростом u монотонно убывает. При $u = u_0$ производная $\omega'(u)$ обращается в бесконечность, так что интеграл $\zeta = \int \frac{du}{\omega}$ расходится.

Покажем, что любое решение уравнения (5) в области $u > 0$ может быть выражено при помощи однопараметрического семейства его решений $\bar{\omega}_c(u)$, определенных при $u < 1$ и удовлетворяющих условию $\bar{\omega}_c(1) = 0$. Действительно, по сказанному выше, каждое решение может быть продолжено до точки $u = u_0$, где оно обратится в нуль. Но все решения уравнения (5), обращающиеся при $u = u_0$ в нуль, можно получить из функций $\bar{\omega}_c(u)$, полагая $\omega = u_0^{3/2} \bar{\omega}_c\left(\frac{u}{u_0}\right)$.

Функции $\bar{\omega}_c(u)$ определяются численным интегрированием. Те из них, которые не обращаются в нуль между 0 и 1, находились следующим образом. Численным методом определялись решения $\omega_\gamma(u)$

уравнения (5), удовлетворяющие начальным данным $\omega_\gamma(0)=1$, $\omega'_\gamma(0)=\operatorname{tg}\gamma$ при разных значениях $\operatorname{tg}\gamma$. Из этих решений функции $\bar{\omega}_c(u)$ находятся пересчетом по формуле $\bar{\omega}_c(u)=u_0^{-2/3}\omega_\gamma(uu_0)$, где $u_0(\gamma)$ — нули функций $\omega_\gamma(u)$. При больших значениях $\operatorname{tg}\gamma$ соответствующие функции $\bar{\omega}_c(u)$ стремятся к функции $\bar{\omega}_0(u)=A^{-2/3}\omega^0(Au)$, где $\omega^0(u)$ — решение уравнения (5) при условиях $\omega^0(0)=0$, $\omega^{0\prime}(0)=1$, а $A=2{,}608$ — нуль этого решения. Функции $\bar{\omega}_c(u)$, имеющие между 0 и 1 нуль $u=\xi$, находились численным интегрированием, исходя из точки $u=1$, $\omega=0$. При этом использовалось представление функций $\bar{\omega}_c(u)$ вблизи этой точки $\omega=Ce^{-z^2}$, $u=1-\sqrt{\pi}\,C(1-\operatorname{erf}z)$.

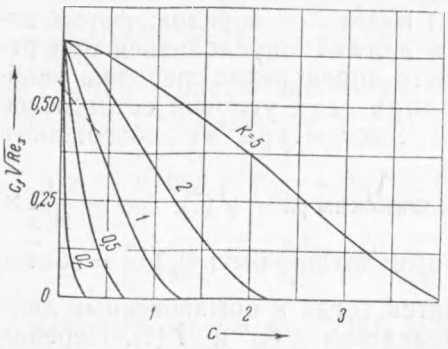


Рис. 1

При помощи функций $\bar{\omega}_c(u)$ легко дать решение сформулированной граничной задачи. Положим $\omega_1=\bar{\omega}_{c_1}(u)$, $\omega_2=K\alpha\bar{\omega}_{c_2}(\alpha^{-2/3}u)$, где $K=\sqrt{\rho_2\mu_2}$ (считаем $\rho_1\mu_1=1$). Для определения параметров C_1 и C_2 и величин α и u^* получаем условия

$$u^*=U(C_1),\quad \alpha^{-2/3}u^*=U(C_2),\quad 2K\bar{\omega}'_{c_2}(0)=C\sqrt{\frac{U(C_2)}{U(C_1)}},\quad Z(C_2)=KZ(C_1).$$

Здесь $U(C)$ — значения u, соответствующие наибольшим значениям $\bar{\omega}_C^{\max}$ функций $\bar{\omega}_C(u)$, и $Z(C)=U^{3/2}(C)/\bar{\omega}_C^{\max}$. В табл. 1 приведены значения функций U, Z, $\bar{\omega}'_c$ для различных значений параметра C (γ или ξ). Эти функции позволяют в каждом конкретном случае произвести расчет представляющих интерес характеристик течения.

Таблица 1

γ°	U	Z	$\bar{\omega}'_c$	ξ	U	Z
0	0	0	0	0	0,579	2,29
15	0,409	0,98	0,161	0,2	0,642	3,28
30	0,507	1,57	0,296	0,4	0,720	4,87
45	0,554	1,90	0,417	0,6	0,806	7,84
60	0,572	2,10	0,521	0,8	0,901	17,8
75	0,576	2,22	0,582	1,0	1,0	∞
90	0,579	2,29	0,619			

Определим, например, значения коэффициента трения $c_f=\tau_w/{}^1\!/_2\rho_0V^2$ жидкости о пластину. После несложных преобразований найдем $c_f\sqrt{\mathrm{Re}_x}=2K\alpha\bar{\omega}_{C_2}(0)$, где $\mathrm{Re}_x=\rho_0lx/\mu_0$. На рис. 1 приведены значения $c_f\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ в зависимости от расхода жидкости C сквозь поверхность пластины для нескольких значений параметра K.

Поступило
17 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Кочин, Соч., **2**, М.—Л., 1949. [2] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 2, М.—Л., 1948. [3] H. Schlichting, K. Bussman, Schr. d. Deutsch. Akad. d. Luftfahrtforsch., **73**, H. 2 (1943).