Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 5

*МАТЕМАТИКА*

Н. И. КОВАНЦОВ

# ПАРЫ КОМПЛЕКСОВ ПРОЕКТИВНОГО ВРАЩЕНИЯ

*(Представлено академиком П. С. Александровым 24 XI 1954)*

В работе ([1]) мы рассмотрели главные поверхности произвольного линейчатого комплекса. Уравнение, определяющее такие поверхности, оказалось почти тождественным характеристическому уравнению элементарной теории поверхностей второго порядка, что дало нам повод назвать его характеристическим уравнением комплекса.

Общий комплекс соответствует тому случаю, когда характеристическое уравнение имеет три различных корня, и, следовательно, такой комплекс содержит три главных поверхности. Случай, когда все три корня характеристического уравнения равны между собою, соответствует линейному комплексу, у которого, таким образом, все линейчатые поверхности являются главными. Наконец, если лишь два корня характеристического уравнения равны между собою ($s_1 = s_2 \neq s_3$), то соответствующие комплексы по аналогии с метрической теорией поверхностей второго порядка мы назвали (может быть, не совсем удачно) комплексами проективного вращения. У таких комплексов кратному корню $s = s_1 = s_2$ соответствует бесконечная совокупность главных поверхностей $\{F\}$, корню $s_3$ — некоторая не принадлежащая к этой совокупности главная поверхность $F_3$. Рассматриваемые комплексы, таким образом, занимают промежуточное положение между произвольными комплексами и комплексами линейными.

Комплексы проективного вращения выделяются среди всех других комплексов тем, что они определяются характерной симметричной системой дифференциальных уравнений, из которой можно заключить, что такие комплексы всегда выступают симметричными парами, представляющими собой довольно любопытные геометрические образования. Этим образованиям и посвящена настоящая работа, причем мы отправляемся в ней от построения канонического тетраэдра для рассматриваемых комплексов.

Как уже сообщалась в указанной работе, мы можем определить тетраэдры первого порядка равенством

$$\omega_{13} + \omega_{24} = 0, \tag{I}$$

если выберем в качестве координатной плоскости $A_1A_2A_3$ плоскость, соответствующую в комплексе точке $A_1$, помещенной на луч; в качестве плоскости $A_1A_2A_4$ — плоскость, аналогично связанную с точкой $A_2$, и определенным образом нормируем координаты вершин тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. При этом главными формами будут $\omega_{13}$, $\omega_{24}$, $\omega_{14}$, $\omega_{23}$.

Дифференцируя внешним образом равенство (I), мы при помощи леммы Картана придем к соотношениям, характеризующим тетраэдры второго порядка:

$$\omega_{12} - \omega_{34} = x_1\omega_{23} + x_2\omega_{14} + x_3\omega_{24}, \quad \omega_{21} - \omega_{43} = x_2\omega_{23} + x_4\omega_{14} + x_5\omega_{24},$$
$$\omega_{22} - \omega_{44} + \omega_{33} - \omega_{11} = x_3\omega_{23} + x_5\omega_{14} + x_6\omega_{24}. \tag{1}$$

Выбором вторичных параметров можно привести коэффициенты $x_3$ и $x_5$ к нулю. Геометрически это будет означать, что вершины

$A_1A_2$ помещены в точки соприкосновения одной из главных поверхностей (любой), т. е. в точки, в которых плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ являются касательными плоскостями этой поверхности (впредь мы эту главную поверхность будем называть координатной). Легко показать, что дифференциальные уравнения координатной поверхности будут иметь вид

$$\omega_{23}=0, \quad \omega_{14}=0. \tag{2}$$

Замечая, что коэффициенты $x_1$ и $x_4$ зависят от вторичных параметров, мы определенным нормированием координат вершин можем добиться того, чтобы эти коэффициенты оказались равными между собою: $x_1=x_4=\lambda$. Впредь, приводя отдельные коэффициенты к частным значениям, мы не будем специально оговаривать того, что эти коэффициенты зависят от вторичных параметров. В каждом конкретном случае это можно легко проверить.

Беря три бесконечно близких образующих координатной поверхности (2), мы придем к ее соприкасающейся квадрике $Q$. Если теперь потребовать, чтобы ребра $A_2A_3$ и $A_1A_4$ тетраэдра были полярно сопряжены относительно $Q$, мы получим $x_6=0$. После этого характеристическое уравнение комплекса будет иметь вид:

$$s\left[(x_2-s)^2-\lambda^2\right]=0,$$

откуда $s_1=0$, $s_2=x_2-\lambda$, $s_3=x_2+\lambda$. Корню $s_1=0$ соответствует координатная поверхность (2). Если рассматриваемый комплекс есть комплекс проективного вращения, причем координатная поверхность принадлежит к совокупности $\{F\}$ главных поверхностей, то $s_1=s_2$ или $s_1=s_3$, и, следовательно, $x_2=\pm\lambda$.

Рассмотрим сначала комплекс, для которого $x_2=\lambda$. Придавая коэффициентам уравнений (1) найденные частные значения, мы приведем эти уравнения к виду:

$$\begin{gathered}\omega_{12}-\omega_{34}=\lambda\omega, \quad \omega_{21}-\omega_{43}=\lambda\omega, \\ \omega_{22}-\omega_{44}+\omega_{33}-\omega_{11}=0.\end{gathered} \qquad (\omega=\omega_{23}+\omega_{14}) \tag{II}$$

(Заметим, что коэффициент $\lambda$ пока еще не является инвариантом. Мы, однако, не приводим его к частному значению из соображений, которые будут ясны из дальнейшего.) Дифференцируя равенства (II) внешним образом и вновь применяя лемму Картана, мы получим равенства, характеризующие тетраэдры третьего порядка:

$$\begin{gathered}2\lambda(\omega_{21}-\omega_{34})=\alpha\omega+\beta\omega_{24}, \quad -2(\omega_{42}+\omega_{31})=\beta\omega, \\ -\lambda(\omega_{44}-\omega_{33}+\omega_{22}-\omega_{11})=(A-B+{}^1/_2\beta)\,\omega_{23}+(A-B+{}^3/_2\beta)\,\omega_{14}, \\ -d\lambda-\lambda(\omega_{44}-2\omega_{33}+\omega_{22})=A\omega_{23}+B\omega_{14}+(\alpha-2\lambda^2)\,\omega_{24}.\end{gathered} \tag{3}$$

Главная поверхность $F_3$, отвечающая корню $s_3=2\lambda$, определяется уравнениями

$$\omega_{23}=\omega_{14}, \qquad \omega_{24}=0. \tag{4}$$

Пусть $Q_3$ — соприкасающаяся с ней квадрика. Выбирая ребра $A_1A_3$ и $A_2A_4$ тетраэдра полярно сопряженными относительно $Q_3$, мы получим $A-B+\beta=0$. Пусть теперь $F'$ есть главная поверхность из совокупности $\{F\}$, проективно перпендикулярная (см. [1]) к координатной поверхности. Уравнения такой поверхности суть

$$\omega_{23}+\omega_{14}=0, \qquad \omega_{24}=0. \tag{5}$$

Беря ребра $A_1A_3$ и $A_2A_4$ полярно сопряженными относительно квадрики $Q'$, соприкасающейся с поверхностью (5), мы получим $\beta=0$, а потому и $A=B=k$. Ребра $A_1A_3$ и $A_2A_4$ будут при этом вполне опреде-

лены. Остается выбрать ребра $A_2A_3$ и $A_1A_4$. Это может быть сделано следующим образом. Пусть $M_1$ и $M_2$ — точки прикосновения поверхности $F_3$; $m_1$ и $m_2$ — проходящие через них образующие квадрики $Q_3$, отличные от $A_1A_2$ (легко показать, что $M_1=A_1+A_2$, $M_2=A_1-A_2$). Если $l_2$ — какая-нибудь прямая плоскости $A_1A_2A_3$, проходящая через точку $A_2$, а $l_1$ — полярно сопряженная с ней относительно $Q$ прямая плоскости $A_1A_2A_4$, $C$ — точка пересечения $l_2$ с $A_1A_3$, а $D$ — точка пересечения $l_1$ с $A_2A_4$, то мы видим, что каждой точке $C$ соответствует определенная точка $D$. Совокупность прямых $CD$ образует некоторую квадрику $Q^*$. Образующая этой квадрики, проходящая через $M_1$, располагается в плоскости, касательной к $F_3$, перемещаясь в ней вместе с перемещением прямой $l_2$. В некоторый момент эта образующая совпадает с $m_1$. Примем соответствующее этому случаю положение прямой $l_2$ за ребро $A_2A_3$, прямой $l_1$ — за ребро $A_1A_4$. Тогда $\alpha=2\lambda^2$. Легко показать, что в этом случае все четыре прямые $A_1A_4$, $A_2A_3$, $m_1$, $m_2$ принадлежат квадрике $Q^*$. Пусть $N_1$ и $N_2$ — точки пересечения прямых $m_1$ и $m_2$ с ребром $A_3A_4$ (можно показать, что $N_1=A_3+A_4$, $N_2=A_3-A_4$). Положение вершин тетраэдра будет вполне определено, и равенства (3) будут теперь иметь вид:

$$\omega_{21}-\omega_{34}=\lambda\omega,\quad \omega_{42}+\omega_{31}=0,\quad \omega_{44}-\omega_{33}+\omega_{22}-\omega_{11}=0,$$
$$-d\lambda-\lambda(\omega_{22}-\omega_{33})=k\omega. \qquad \text{(III)}$$

Дифференцируя равенство $\omega_{42}+\omega_{31}=0$, получим $\omega_{41}+\omega_{32}=\rho\omega$. Выбором вторичных параметров, что означает некоторое нормирование координат, можно привести $\rho$ к единице. Тогда

$$\bar{\omega}=\omega \quad (\bar{\omega}=\omega_{41}+\omega_{32}). \qquad (\text{IV}_1)$$

Пронормируем, наконец, координаты вершин тетраэдра так, чтобы $(A_1A_2A_3A_4)=1$. Тогда

$$\omega_{11}+\omega_{22}+\omega_{33}+\omega_{44}=0. \qquad \text{(A)}$$

Тетраэдр полностью определен, следовательно, все коэффициенты уравнений становятся инвариантами. Дифференцируя равенства $\bar{\omega}=\omega$, $\omega_{44}-\omega_{33}+\omega_{22}-\omega_{11}=0$ и $\omega_{21}-\omega_{34}=\lambda\omega$, найдем:

$$\omega_{22}-\omega_{33}=2x\omega,\quad \omega_{41}=y\omega+\omega_{14},\quad \omega_{31}=\theta\omega+\omega_{24}. \qquad \text{(B)}$$

Перепишем теперь равенства (I) — (IV$_1$), (A), (B) двумя способами в разной последовательности следующим образом (проделав предварительно некоторые преобразования):

$$\omega_{13}+\omega_{24}=0,\quad \omega_{42}+\omega_{31}=0,\qquad \omega_{42}+\omega_{31}=0,\quad \omega_{13}+\omega_{24}=0,$$
$$\omega_{12}-\omega_{34}=\lambda\omega,\quad d\lambda=r\omega,\qquad \omega_{43}-\omega_{21}=-\lambda\bar{\omega},\quad d(-\lambda)=-r\bar{\omega},$$
$$\omega_{12}=\omega_{21},\quad \omega_{34}=\omega_{43},\quad \bar{\omega}=\omega,\qquad \omega_{43}=\omega_{34},\quad \omega_{21}=\omega_{12},\quad \omega=\bar{\omega},$$

$$\omega_{11}=x\omega,\quad \omega_{44}=-x\omega,\qquad \omega_{44}=-x\bar{\omega},\quad \omega_{11}=x\bar{\omega},$$
$$\omega_{22}=x\omega,\quad \omega_{33}=-x\omega,\qquad \omega_{33}=-x\bar{\omega},\quad \omega_{22}=x\bar{\omega},$$
$$\omega_{11}=y\omega+\omega_{14},\quad \omega_{31}=\theta\omega+\omega_{24},\quad \omega_{14}=-y\bar{\omega}+\omega_{41},\quad \omega_{24}=-\theta\bar{\omega}+\omega_{31}.$$

Сравнивая левую и правую части, мы видим, что правый столбец имеет относительно индексов 1, 2, 3, 4 то же строение, что и левый относительно индексов 4, 3, 2, 1. Поскольку, однако, ребро $A_1A_2$ описывает комплекс проективного вращения, то это означает, что ребро $A_3A_4$ описывает также комплекс проективного вращения. Комплексы, описываемые ребрами $A_1A_2$ и $A_3A_4$, характеризуются инвариантами, равными по абсолютной величине и противоположными по знаку.

Теорема 1. *Каждая из главных поверхностей совокупности* $\{F\}$ *принадлежит пучку линейных комплексов, уравнение которого в плюккеровых координатах относительно подвижного тетраэдра* $(\Sigma c_{ik}\, p_{ik} = 0;\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ *имеет вид:*

$$p_{14} - p_{23} + \nu(p_{13} - p_{24}) = 0. \tag{6}$$

*В частности, при* $\nu = 0$ *имеем линейный комплекс, касательный к рассматриваемому. Все комплексы пучка* (6) *содержат ребро* $A_3A_4$ *тетраэдра. Отсюда, между прочим, следует, что комплексы* $A_1A_2$ *и* $A_3A_4$ *составляют пару Т* (*см.* [2]). *Два специальных комплекса, принадлежащих пучку* (6), *имеют своими осями прямые* $M_1N_2$ *и* $M_2N_1$. *Иными словами, все главные поверхности совокупности* $\{F\}$ *принадлежат линейной конгруенции с директрисами на прямых* $M_1N_2$ *и* $M_2N_1$.

Так как $N_2$ и $N_1$ — точки пересечения директрис конгруенции с двумя инвариантными прямыми — образующими квадрики $Q_3$, проходящими через точки $M_2$ и $M_1$, — то прямая $N_1N_2 = A_3A_4$ определяется однозначно. Тем самым положение ребра $A_3A_4$ оказывается не зависящим от выбора координатной главной поверхности из совокупности $\{F\}$, а потому мы действительно имеем право говорить о паре комплексов проективного вращения. Будем называть их комплексами $K$ и $\bar{K}$.

Как следствие из теоремы 1 отметим, что *соприкасающиеся квадрики к главным поверхностям из совокупности* $\{F\}$ *имеют своими образующими директрисы отмеченной линейной конгруенции.*

Легко заметить, что дифференциальные уравнения главных поверхностей из совокупности $\{F\}$ имеют вид $\omega_{23} = p\omega_{24}$, $\omega_{14} = -p\omega_{24}$, где $p$ — произвольная функция. Следовательно, для этих поверхностей $\omega = 0$. Но тогда из равенства $\omega = \bar{\omega}$ следует, что:

Теорема 2. *Когда ребро* $A_1A_2$ *описывает главную поверхность из совокупности* $\{F\}$ *комплекса* $K$, *то ребро* $A_3A_4$ *описывает главную поверхность из совокупности* $\{\bar{F}\}$ *главных поверхностей комплекса* $\bar{K}$.

Из равенств $\omega = \bar{\omega}$ и $\omega_{31} = \theta\omega - \omega_{24}$ следует, что:

Теорема 3. *Двум проективно-перпендикулярным поверхностям из совокупности* $\{F\}$ *главных поверхностей комплекса* $K$ *соответствуют две проективно-перпендикулярные же главные поверхности из совокупности* $\{\bar{F}\}$ *комплекса* $\bar{K}$.

В случае $x_2 = -\lambda$ уравнения движения канонического тетраэдра могут быть приведены к виду:

$$\omega_{13} + \omega_{24} = 0, \qquad \omega_{42} + \omega_{31} = 0,$$
$$\omega_{12} - \omega_{34} = \lambda\omega, \qquad d\lambda = r\omega, \qquad \omega = \bar{\omega},$$
$$\omega_{12} + \omega_{21} = 0, \qquad \omega_{34} + \omega_{43} = 0, \qquad (\omega = \omega_{23} - \omega_{41},$$
$$\omega_{41} = y\omega + \omega_{14}, \qquad \omega_{31} = \theta\omega + \omega_{24}, \qquad \bar{\omega} = \omega_{32} - \omega_{14}).$$
$$\omega_{11} = x\omega, \qquad \omega_{44} = -x\omega,$$
$$\omega_{22} = x\omega, \qquad \omega_{33} = -x\omega.$$

Здесь также возможна замена индексов 1, 2, 3, 4 на 4, 3, 2, 1. Все высказанные ранее предложения могут быть перенесены и на этот случай.

Запорожский государственный
педагогический институт

Поступило
10 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Кованцов, ДАН, 95, № 5 (1953). [2] М. А. Акивис, ДАН, 61, № 2 (1948).