Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 5

МАТЕМАТИКА

ЛЮБОМИР ИЛИЕВ

О РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 XI 1954)

Обозначим через S класс функций

$$f(z) = z + a_1 z^2 + \dots, \tag{1}$$

регулярных и однолистных в круге $|z|<1$. Обозначим через $S^{(k)}$ множество k-симметричных функций класса S, которые представляются в виде

$$f_k(z) = z + a_1^{(k)} z^{k+1} + a_2^{(k)} z^{2k+1} + \dots \tag{2}$$

Через S_N, соответственно $S_N^{(k)}$, обозначим класс функций из S, соответственно из $S^{(k)}$, для которых $|f(z)|<N$, соответственно $|f_k(z)|<N$. Очевидно, $S_N \subset S$, $S_N^{(k)} \subset S^{(k)}$, $S_\infty = S$, $S_\infty^{(k)} = S^{(k)}$.

Если $f(z) \in S_N$ и $|z_1|<1$, $|z_2|<1$, $z_1 \neq z_2$, то И. Е. Базилевич (1) установил точное неравенство:

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geqslant \prod_{i=1}^{2} \left|\frac{f(z_i)}{z_i}\right| \frac{\sqrt{1-|z_i|^2}}{\sqrt{1-|f(z_i)|^2/N^2}}. \tag{I}$$

Согласно одному результату Р. Неванлина (2), при $f(z) \in S_N$ и $|z|<1$ существует точное неравенство

$$|f(z)| \geqslant N \frac{(1+|z|)\sqrt{N} - \sqrt{N(1+|z|)^2 - 4|z|}}{(1+|z|)\sqrt{N} + \sqrt{N(1+|z|)^2 - 4|z|}}. \tag{II}$$

Как известно, если $f_k(z) \in S_k$, то существует некоторая функция $f(z) \in S$ такая, что

$$f_k(z) = \sqrt[k]{f(z^k)}. \tag{3}$$

Пусть $f_k(z) \in S_M^{(k)}$ и $f(z)$ — функция класса S, которая связана с $f(z)$ посредством равенства (3). Тогда, согласно (3), $|f(z)|<M^k$, т. е. $f(z) \in S_N$, где $N = M^k$. Следовательно, если $f_k(z) \in S_M^{(k)}$, то из (II) получим:

$$\left|\frac{f_k(z)}{z}\right| \geqslant \frac{M}{|z|}\left[\frac{(1+|z|^k)\sqrt{M^k} - \sqrt{M^k(1+|z|^k)^2 - 4|z|^k}}{(1+|z|^k)\sqrt{M^k} + \sqrt{M\ (1+|z|^k)^2 - 4|z|^k}}\right]^{1/k}; \tag{4}$$

$$\frac{1-|z|^2}{1-\frac{|f_k(z)|^2}{M^2}} \geqslant \frac{1-|z|^2}{1-\left[\frac{(1+|z|^k)\sqrt{M^k} - \sqrt{M^k(1+|z|^k)^2 - 4|z|^k}}{(1+|z|^k)\sqrt{M^k} + \sqrt{M^k(1+|z|^k)^2 - 4|z|^k}}\right]^{2/k}}. \tag{5}$$

Легко показать, что правые части в неравенствах (4) и (5) являются убывающими функциями $|z|$ при $|z|<1$, любом k и $M\geqslant 1$. Из (I), (4) и (5) следует

Теорема. *Если* $f_k(z)\in S_M^{(k)}$ *и* $|z_1|<r$, $|z_2|<r$, $z_1\neq z_2$, $0<r<1$, *то*

$$\left|\frac{f_k(z_1)-f_k(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqslant$$

$$\geqslant M^2\frac{1-r^2}{r^2}\frac{\left[(1+r^k)\sqrt{M^k}-\sqrt{M^k(1+r^k)^2-4r^k}\right]^{2/k}}{\left[(1+r^k)\sqrt{M^k}+\sqrt{M^k(1+r^k)^2\ldots 4r^k}\right]^{2/k}-\left[(1+r^k)\sqrt{M^k}-\sqrt{M^k(1+r^k)^2-4r^k}\right]^{2/k}}. \tag{III}$$

При $k=1$ *и* $k=2$ *неравенство* (III) *имеет вид*:

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqslant\frac{M^{3/2}}{2}\frac{1-r}{r^2}\frac{M(1+r)^2-2r-(1+r)\sqrt{M}\sqrt{M(1+r)^2-4r}}{\sqrt{M(1+r)^2-4r}}, \tag{III$_1$}$$

соответственно:

$$\left|\frac{f_2(z_1)-f_2(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqslant\frac{M^2}{2}\frac{1-r^2}{r^2}\frac{(1+r^2)M-\sqrt{M^2(1+r^2)^2-4r^2}}{\sqrt{M^2(1+r^2)^2-4r^2}}. \tag{III$_2$}$$

Знак равенства в (III$_1$), *соответственно* (III$_2$), *достигается для однолистной функции*

$$f(z)=M\frac{\sqrt{M(1-z)^2+4z}-(1-z)\sqrt{M}}{\sqrt{M(1-z)^2+4z}+(1-z)\sqrt{M}},$$

соответственно

$$f_2(z)=M\left[\frac{\sqrt{M^2(1-z^2)^2+4z^2}-(1-z^2)M}{\sqrt{M^2(1-z^2)^2+4z^2}+(1-z^2)M}\right]^{1/2}.$$

При $z_1\to z_2$ и $k=1$ из (III) получаем теорему об искажении в классе S_M, а отсюда и в классе $S_M^{(k)}$. При $M\to\infty$ из (III) находим полученное нами [3] при помощи одного неравенства Г. М. Голузина [4] неравенство в классе $S^{(k)}$:

$$\left|\frac{f_k(z_1)-f_k(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqslant\frac{1-r^2}{r^2}\frac{1}{(1-r^k)^{4/k}}, \tag{IV}$$

которое является точным при $k=1$ и $k=2$.

Софийский государственный университет
София, Болгария

Поступило
25 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Е. Базилевич, Матем. сборн., **28** (70) : 2 (1951). [2] R. Nevanlina, Overs. av Finska Vetensc. Förch., 62 (1917). [3] Л. Илиев, ДАН, **69**, № 4 (1949). [4] Г. М. Голузин, Матем. сборн., **19** (61) : 2 (1946).