Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 5

МАТЕМАТИКА

В. И. ЗУБОВ

К ТЕОРИИ ВТОРОГО МЕТОДА А. М. ЛЯПУНОВА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 25 XI 1954)

Рассмотрим в полном метрическом пространстве R динамическую систему $f(p, t)$ [1].

Множество $B \subset R$ называется инвариантным, если для всех $t \in (-\infty, +\infty)$ $f(B, t) = B$. Известно, что замыкание $\overline{B}$ этого множества инвариантно.

Определение. Замкнутое инвариантное множество F называется устойчивым по Ляпунову, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\rho(p, F) < \delta$, то $\rho(f(p, t), F) < \varepsilon$ при $t > 0$. В дальнейшем через δ_1 мы будем обозначать положительное число, меньшее числа δ, соответствующего некоторому фиксированному ε.

Если для устойчивого по Ляпунову множества F $\rho(f(p, t), F) \to 0$ при $t \to \infty$ и при всех достаточно малых $\rho(p, F)$, то множество F называется асимптотически устойчивым. Если, кроме того, для любого $\eta > 0$ существует такое $T(\eta)$, что при $t > T(\eta)$ имеет место неравенство $\rho(f(p, t), F) < \eta$ для всех p таких, что $\rho(p, F) < \delta_1$, а для любых $r_1, \tau > 0$ и $r_1 < \delta_1$ существует такое $r_2 > 0$, что при $r_1 < \rho(p, F) < \delta_1$ и $t \in [0, \tau]$ имеет место неравенство $\rho(f(p, t), F) > r_2$, то множество F называется равномерно асимптотически устойчивым.

Множество A всех точек p, не принадлежащих F и обладающих свойством $\rho(f(p, t), F) \to 0$ при $t \to \infty$, называется областью асимптотической устойчивости множества F.

Легко показать, что A является открытым множеством и что его граница $\overline{A} - A$ является инвариантным множеством.

Задача настоящей работы состоит в том, чтобы дать необходимое и достаточное условие равномерной асимптотической устойчивости множества F и способ отыскания всего множества A.

Заметим, что задача обращения теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости решалась рядом авторов ([2–5]). Здесь, отчасти пользуясь развитыми ими методами, дадим исчерпывающее решение вопроса.

Последующие теоремы относятся к условиям равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 1. *Если множество F асимптотически устойчиво и множество точек p, определенных условием $\rho(p, F) < \delta_1$, компактно, то F равномерно асимптотически устойчиво.*

Эта теорема позволяет применять развитую ниже теорию к случаю, когда множество F обладает компактной окрестностью.

Будем говорить, что функция $V(p)$ имеет производную по t в точке p, если существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{V(f(p, t)) - V(p)}{t}.$$

Теорема 2. *Если множество F равномерно асимптотически устойчиво, то при $p \in A$ существует функция $V(p)$, непрерывная вместе с dV/dt и обладающая свойствами:*

а) *Для каждого $\varkappa > 0$ существует такое $\gamma > 0$, что $-1 < V(p) < -\gamma$, если $\varkappa < \rho(p, F)$ и $V(p) \to 0$ равномерно при $\rho(p, F) \to 0$;*

б) *$dV/dt = \varphi(\rho(p, F))(1 + V)$, где $\varphi(\rho(p, F)) \to 0$ при $\rho(p, F) \to 0$, причем для каждого $\alpha > 0$ существует $\beta > 0$ такое, что $\varphi(\rho(p, f)) > \beta$ при $\rho(p, F) > \alpha$.*

Условие б) в этой теореме показывает, что dV/dt обладает свойством положительной определенности. Вид этого условия позволяет решить вопрос о предельном значении функции $V(p)$ на множество $\bar{A} - A$.

Теорема 3. *Если точка $M \in \bar{A} - A$, $M \in F$ и $p_i \in A$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — любая последовательность точек, то из условия $\rho(p_i, M) \to 0$ при $i \to \infty$ следует $1 + V(p_i) \to 0$ при $i \to \infty$.*

Теорема 3 позволяет отыскать все множества A.

Поверхность уровня $1 + V(p) = \lambda$ при $\lambda \in (0, 1)$ является сечением множества A, так что любая траектория $f(p, t)$ при $p \in A$ пересекает эту поверхность уровня лишь в одной точке. Семейство этих поверхностей заполняет все множество A при $0 < \lambda < 1$.

Теорема 4. *Если для динамической системы $f(p, t)$ существуют функции $V(p)$ и $\varphi(p)$, удовлетворяющие условиям теоремы 2, то множество F будет равномерно асимптотически устойчивым, а множество A будет состоять из областей A_k, примыкающих к связным компонентам множества F, причем в этих областях A выполняется неравенство*

$$-1 < V(p) < 0.$$

Теорема 5. *Если функции $\varphi(p)$ и $V(p)$, удовлетворяющие условиям теоремы 2, построены, то при $\rho(p, F) < \delta_1$ мы имеем*

$$\rho(f(p, t), F) < L(t),$$

где функция $L(t)$ непрерывна и монотонно убывает до нуля при $t \to \infty$.

Установим теперь свойство гладкости функции $V(p)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ принадлежат классу C^r $(r \geqslant 1)$, заданы при $t \in (-\infty, +\infty)$ и $x_i \in (-\infty, +\infty)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и обращаются в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ и любых значениях t.

Если систему (1) дополнить уравнением

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2}},$$

то дополненная система определит в пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ динамическую систему $f(p, s)$.

Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ и $t = s$ есть равномерно асимптотически устойчивое решение, то по теореме 2 будут существовать функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$.

Теорема 6. *Если функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит классу C $(r \geqslant 1)$, то и соответствующая ей функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$*

принадлежит тому же классу и является единственным решением уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2}\,(1 + V)$$

при условии, что $V(0, 0, \ldots, 0, t) = 0$.

Поступило
14 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949. [2] И. Г. Малкин, Прикладн. матем. и мех., **18**, в. 2 (1954). [3] J. L. Massera, Ann. of Math., **50**, № 3 (1949). [4] Е. А. Барбашин, Матем. сборн., **29**, в. 2 (1951). [5] Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, Прикладн. матем. и мех., **17**, в. 3 (1954).