Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР И. М. ГЕЛЬФАНД

ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1. Обычно случайный процесс задается распределением вероятностей случайных величин $(x(t_1), \ldots, x(t_n))$ в любые n моментов времени. Однако можно привести много примеров практически важных случайных процессов, в которых такое распределение вероятностей не существует. Примером такого процесса является белый шум, который, грубо говоря, получается наложением всех частот со случайными и одинаково распределенными по Гауссу независимыми амплитудами. А. Н. Колмогоровым была поставлена задача о введении обобщенных случайных процессов. В этой заметке вводится такое описание случайных процессов, при котором, по всей видимости, могут быть охвачены все практически важные примеры. Если $x(t)$ — случайный процесс, то всякий «линейный прибор» дает нам распределение вероятностей не для величины $x(t_0)$, а для величины $F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, x(t)\, dt$, ($\varphi(t)$ — некоторая функция, характеризующая прибор), поскольку прибор не включается и выключается мгновенно, а действует некоторое конечное время. В связи с этим естественно задавать случайный процесс распределением вероятностей для достаточно полного набора функций $\varphi(t)$ (приборов).

2. Определение обобщенного случайного процесса. Рассмотрим пространство K бесконечно дифференцируемых функций, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала *. Обозначим через $F(\varphi)$ линейные функционалы в K. Мы будем говорить, что нам задан случайный процесс (случайный функционал F), если для каждой функции $\varphi(t)$ и любых a и b заданы вероятности неравенства $a < F(\varphi) < b$. Эти вероятности должны удовлетворять требованиям согласованности и непрерывности, которые мы сформулируем ниже.

Пусть $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$. Тогда для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ мы знаем распределение случайной величины $\xi = \alpha_1\xi_1 + , \ldots, + \alpha_n\xi_n$, где $\xi = F(\varphi)$, $\xi_i = F(\varphi_i)$. Так как в n-мерном пространстве $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ знание меры (вероятности) полос $a < \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n < b$ однозначно определяет меру любого множества (см., например, [3]), то вероятности неравенств $a < F(\varphi) < b$, если могут быть продолжены, то однозначно до вероятностей одновременного выполнения неравенств $a_i < F(\varphi_i) < b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ для любых φ_i и a_i, b_i.

От распределения вероятностей $a < F(\varphi) < b$ мы будем требовать следующего:

1°. Требование согласованности. *Задание вероятностей $a < F(\varphi) < b$ для любых a, b и $\varphi \in K$ может быть продолжено до распределения вероятностей $a_i < F(\varphi_i) < b_i$, $i = 1, \ldots, n$, для любых n, $\varphi_i \in K$ и чисел a_i, b_i.*

* Пространство K, введенное Л. Шварцем [1], можно заменить любым другим пространством основных функций [2].

2°. Требование непрерывности. Мы имеем, что каждым элементам $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ отвечает распределение вероятностей для $F(\varphi_1), \ldots, F(\varphi_n)$, т. е. некоторая мера в n-мерном пространстве. Мы будем требовать, чтобы *для любого n отображение системы n функций φ_i из K в пространство W_n мер в n-мерном пространстве было непрерывно относительно топологии в K и слабой топологии в W_n.* Это требование непрерывности естественно и означает, что незначительное изменение «приборов» φ_i лишь незначительно меняет «показания приборов».

Как и в обычных обобщенных функциях (1), строится производная обобщенного процесса. А именно, если $F_1(\varphi)$ — случайный процесс, являющийся производной процесса $F(\varphi)$, то вероятность неравенства $a < F_1(\varphi) < b$ равна, по определению, вероятности неравенства — $a > F(\varphi') > b$.

3. Корреляционный функционал. Гауссовские процессы. Корреляционным функционалом $c(\varphi)$ для данного процесса называется среднее значение величины $|F(\varphi)|^2$, т. е. $c(\varphi) = \mathfrak{M}[|F(\varphi)|^2]$*. Из требования согласованности и непрерывности следует, что $c(\varphi)$ есть положительно-определенный квадратичный функционал, непрерывный относительно топологии в K.

Случайный процесс называется гауссовским, если для каждого φ плотность распределения вероятностей для $F(\varphi)$ гауссовская, т. е. имеет вид $(\pi c)^{-1/2} \exp(-\xi^2 c^{-1}(\varphi))$, где $c(\varphi)$ — непрерывный функционал. Так как корреляционным функционалом для гауссовского процесса является $c(\varphi)$, то получаем, что $c(\varphi)$ должен быть квадратичным и что *всякий непрерывный положительно-определенный квадратичный функционал является корреляционным для некоторого (гауссовского) процесса* (4).

Случайный процесс называется стационарным, если для любого τ вероятности неравенств $a < F(\varphi(t)) < b$ и $a < F(\varphi(t+\tau)) < b$ совпадают. Можно доказать, что *корреляционный функционал стационарного процесса имеет вид $T(\varphi^* \times \varphi)$*, где T — линейный функционал в пространстве K (т. е. обобщенная функция), а $\varphi^* \times \varphi$ — свертка функции $\varphi(t)$ с функцией $\overline{\varphi^*}(t) = \overline{\varphi}(-t)$. В частности, произвольный гауссовский стационарный процесс задается плотностью распределения вероятностей для величины ξ по формуле $\exp(-\xi^2 / T(\varphi^* \times \varphi))$. Так как $T(\varphi^* \times \varphi) \geqslant 0$ для любого $\varphi \in K$, то, по теореме Бохнера — Шварца (1), *обобщенная функция T, задающая корреляционный функционал стационарного процесса, есть преобразование Фурье* (в обобщенном смысле (1) или для других пространств (2)) *некоторой монотонной функции $\sigma(\lambda)$, причем существует такое n, что для больших $\lambda_2 - \lambda_1$ имеет место неравенство $|\sigma(\lambda_2) - \sigma(\lambda_1)| < c|\lambda_1 - \lambda_2|^n$.*

Функция $\sigma(\lambda)$ называется спектральной функцией данного процесса. Так например, для «белого шума» $c(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t)\,dt$, $T = \delta(t)$ и, значит, $\sigma(\lambda) = \lambda$.

4. Процессы со стационарными приращениями n-го порядка. Если n-я производная случайного процесса есть стационарный процесс, мы будем данный процесс называть процессом со стационарными приращениями n-го порядка. Другими словами, если $F_n(\varphi) = (-1)^n F(\varphi^{(n)})$, то $F_n(\varphi)$ инвариантно относительно замены $\varphi(t) \to \varphi(t+\tau)$. Если $c(\varphi)$ — корреляционный функционал для исходного процесса, то $c(\varphi^{(n)})$ инвариантен относительно сдвига, и, значит,

---

* Вообще, полилинейный функционал $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = \mathfrak{M}[F(\varphi_1) \ldots F(\varphi_k)]$ есть для обобщенных процессов аналог моментов k-го порядка.

переходя к преобразованиям Фурье, мы можем получить, что функционал $\tilde{T}(\psi)$ (преобразование Фурье T) положителен на положительных функциях $\psi(\lambda)$, имеющих в начале нуль порядка $2n$. Всякий такой функционал имеет вид $\tilde{T}(\psi) = \int_{-1}^{1} \frac{\psi(\lambda) - \sum_{k=0}^{2n-1} \psi^{(k)}(0) \frac{\lambda^k}{k!}}{\lambda^{2n}} d\sigma(\lambda) + \int_{1}^{\infty} \psi(\lambda)\, d\sigma(\lambda) + \int_{-\infty}^{-1} \psi(\lambda)\, d\sigma(\lambda) + \sum a_k \psi^{(k)}(0)$, где $\sigma(\lambda)$ — монотонная функция, удовлетворяющая для некоторого m неравенству $|\sigma(\lambda_2) - \sigma(\lambda_1)| < c|\lambda_2 - \lambda_1|^m$ для достаточно больших $\lambda_2 - \lambda_1$. Сам корреляционный функционал $T(\varphi^* \times \varphi)$ определяется линейным функционалом T, который есть преобразование Фурье от $\tilde{T}$. Этот результат несколько обобщает результаты А. Н. Колмогорова ([5]), А. М. Яглома и М. С. Пинскера ([6]).

5. Характеристический функционал. Следуя А. Н. Колмогорову ([7]), зададим характеристический функционал формулой $L(\varphi) = \mathfrak{M}[e^{iF(\varphi)}]$, где $\mathfrak{M}$ означает среднее значение. Для его вычисления достаточно знать вероятности неравенств $a < F(\varphi) < b$. Так например, для гауссовского процесса характеристический функционал есть $\exp(-c(\varphi))$. Имеет место теорема:

Для того чтобы некоторый функционал $L(\varphi)$ был характеристическим, необходимо и достаточно, чтобы он был положительно-определенным и непрерывным относительно топологии в K.

Без труда можно показать, что характеристический функционал однозначно определяет случайный процесс.

6. Процессы с независимыми в каждой точке значениями. Мы будем говорить, что имеется процесс с «независимыми в каждой точке значениями», если случайные величины $F(\varphi_1)$ и $F(\varphi_2)$ независимы между собой всякий раз, когда $\varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t) = 0$, или, другими словами, если результаты измерений в непересекающиеся интервалы времени независимы между собой. Примерами таких процессов будут, например, производные процессов с независимыми приращениями (например, скорость частицы в броуновском движении). Если $L(\varphi)$ — характеристический функционал процесса с независимыми значениями, то имеет место равенство $L(\varphi_1 + \varphi_2) = L(\varphi_1) \cdot L(\varphi_2)$, если $\varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t) = 0$. Предполагая, что $L(\varphi)$ не обращается в нуль, получаем, что функционал $M(\varphi) = \log L(\varphi)$ удовлетворяет равенству $M(\varphi_1 + \varphi_2) = M(\varphi_1) + M(\varphi_2)$ всякий раз, когда $\varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t) = 0$. Такой функционал мы будем называть функционалом локального типа. Примерами таких функционалов будут

$$M(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t), t)\, dt, \tag{1}$$

где $f(0, 0, \ldots, 0, t) = 0$. В частности, для стационарных процессов функция f не зависит явно от t, т. е. имеет вид $f(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t))$. Было бы интересно доказать, что этим исчерпываются все стационарные процессы с независимыми значениями. Можно доказать, что для того, чтобы логарифм характеристического функционала имел вид (1) с функцией f, зависящей лишь от $\varphi(t)$, а не еще от $\varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)$ (т. е. $f = f(\varphi(t))$), необходимо и достаточно, чтобы функция $\exp(f(x))$ была характеристической функцией некоторого безгранично делимого закона. Мы получаем отсюда, что процессы указанного вида (т. е. для которых функция f имеет вид $f(\varphi(t))$ совпадают с производными процессов с независимыми приращениями. При доказательстве этого утверждения естественным образом получается доказа-

тельство теоремы о каноническом виде безгранично делимых законов, полученных в [8–11].

Новый класс стационарных процессов с назависимыми значениями более широкий, чем производные процессов с независимыми приращениями, получается, если в формуле (1) функция f зависит и от производных, т. е. имеет вид $f(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(k)}(t))$. Мы можем здесь указать некоторые достаточные условия положительной определенности соответствующего характеристического функционала. А именно:

Для положительной определенности характеристического функционала, отвечающего функции f, достаточно, чтобы функция $\exp(sf(x_0, x_1, \ldots, x_k))$ была для $s>0$ положительно-определенной функцией переменных $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Это дает для функции f каноническое разложение

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \int_{|s|\leqslant 1} \frac{e^{i\sum x_p s_p} - 1 - i\sum_{p=0}^{k} x_p s_p}{\nu\left(\sum_{p=0}^{k} s_p^2\right)}\, d\sigma + \int_{|s|>1} e^{i\sum x_p s_p}\, d\sigma + a_0 + i\sum_{p=0}^{k} c_p x_p,$$

где σ — конечная мера в $(k+1)$-мерном пространстве, а $\nu(z) = z$, если $z<1$, и $\nu(z) = 1$, если $z>1$.

Укажем еще общий вид корреляционного функционала $c(\varphi)$ для процесса с независимыми значениями. В частности, тем самым мы укажем общий вид гауссовских процессов с независимыми значениями. Так как для процессов с независимыми значениями $c(\varphi_1 + \varphi_2) = c(\varphi_1) + c(\varphi_2)$, если $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = 0$, то можно показать, что:

Общий вид корреляционного функционала для процессов с независимыми значениями следующий:

$$c(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,k=0}^{\infty} Q_{ik}(t)\, \varphi^{(i)}(t)\, \varphi^{(k)}(t)\, dt,$$

где $Q_{ik}(t)$ — непрерывные функции. При этом на каждом конечном интервале имеется лишь конечное число функций $Q_{ik}(t)$, отличных от нуля, и $c(\varphi) \geqslant 0$.

Можно далее показать, что любой момент $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ для процессов с независимыми значениями имеет аналогичный вид, и тем самым можно получить общий вид процессов с независимыми значениями, имеющих аналитический характеристический функционал.

Поступило
3 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Schwartz, Théorie des distributions, Paris, 1951. [2] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, **8**, № 6, 3 (1953). [3] А. А. Хачатуров, Усп. матем. наук, **9**, № 3, 205 (1954). [4] А. Я. Хинчин, Math. Ann., **109**, 604 (1934). [5] А. Н. Колмогоров, ДАН, **26**, № 1, 6 (1940). [6] А. М. Яглом, М. С. Пинскер, ДАН, **90**, № 5, 731 (1953). [7] А. Н. Колмогоров, C. R., **200**, 1717 (1935). [8] А. Н. Колмогоров, Atti Acad. Naz. Lincei, 805, 808, 866—869 (1931). [9] Bruno de Finetti, Rendiconti R. Accad. Lincei, **6**, 12, 278 (1930). [10] P. Lévy, Annali R. Sc. Sup. Pisa (2), 3, 337 (1934). [11] А. Я. Хинчин, Бюлл. Моск. унив., **1**, в. I (1937).