Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 5

МАТЕМАТИКА

В. В. ВАСИЛЬЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 1 XII 1954)

Возьмем уравнение

$$L[z(x)] + \lambda \int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} K_\nu(x, y) z^{(\nu)}(y)\, dy = 0, \qquad (1)$$

где $L[z(x)] = z^{(n)}(x) + a_1(x) z^{(n-1}(x) + \cdots + a_n(x) z(x)$. Ядра $K_\nu(x, y)$ в случае, когда $m < n$, удовлетворяют всем условиям, налагаемым на ядра линейных интегральных уравнений; если же $m = n + p$, где p — любое целое число или 0, то они должны быть дифференцируемы $p + 1$ раз по x.

Общий интеграл линейного интегро-дифференциального уравнения с одним ядром и дифференциальным оператором от неизвестной функции под знаком интеграла был впервые найден А. И. Некрасовым (1). Затем метод А. И. Некрасова был распространен на уравнения (1) автором этой заметки (2). Задача Коши для уравнения (1) решалась рядом авторов (3,4). В настоящей статье дается новый способ решения этой задачи, основанный на использовании общего интеграла уравнения (1), если в нем учитывать начальные данные. Таким образом, эта статья является прямым продолжением работы А. И. Некрасова (1).

Пусть $m < n$. Решение уравнения (1) ищем при следующих начальных данных: $z^{(s)}(x_0) = z_0^{(s)}$ $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Согласно работе (2) общий интеграл уравнения (1) имеет вид:

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\Delta_1(\eta) z_1(x) + \cdots + \Delta_n(\eta) z_n(x)}{\Delta(\eta)} F(\eta)\, d\eta, \qquad (2)$$

где c_i — произвольные постоянные: $z_i(x)$ — линейно независимые решения уравнения $L[z(x)] = 0$; $\Delta(x)$ — определитель Вронского: $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_n(x)$ — его миноры, взятые с их знаками, а функция $F(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$F(x) + \lambda \int_a^b \left[\{G_\nu(y) K_\nu(x, y)\} + \int_{x_0}^{y} \{H_\nu(\eta, y) K_\nu(x, y)\} F(\eta) \frac{d\eta}{\Delta(\eta)} \right] dy = 0, \qquad (3)$$

в котором $G_\nu(y) = c_1 z_1^{(\nu)}(y) + \cdots + c_n z_n^{(\nu)}(y)$, $H_\nu(\eta, y) = \Delta_1(\eta) z_1^{(\nu)}(y) + \cdots + \Delta_n(\eta) z_n^{(\nu)}(y)$, а фигурные скобки обозначают, что берется сумма произведений функций, стоящих в скобках, от $\nu = 0$ до $\nu = m$. Уравнение (3) решается по формуле

$$F(x) = -\frac{\lambda}{D_1(\lambda)} \int_a^b D_1(x, y; \lambda)\, dy, \qquad (4)$$

где

$$D_1(\lambda) = 1 + \lambda \int_a^b dy_1 \int_{x_0}^{y_1} \{H_\nu(z_1, y_1) K_\nu(x_1, y_1)\} \frac{dx_1}{\Delta(x_1)} +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b dy_1\, dy_2 \int_{x_0}^{y_1} \int_{x_0}^{y_2} \begin{vmatrix} \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x_1, y_1)\} & \{H_\nu(x_2, y_2) K_\nu(x_1, y_2)\} \\ \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x_2, y_1)\} & \{H_\nu(x_2, y_2) K_\nu(x_2, y_2)\} \end{vmatrix} \frac{dx_1 dx_2}{\Delta(x_1)\Delta(x_2)} + \cdots;$$

$$D_1(x, y; \lambda) = \{G_\nu(y) K_\nu(x, y)\} +$$

$$+ \lambda \int_a^b dy_1 \int_{x_0}^{y_1} \begin{vmatrix} \{G_\nu(y) K_\nu(x, y)\} & \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x, y_1)\} \\ \{G_\nu(y) K_\nu(x_1, y)\} & \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x_1, y_1)\} \end{vmatrix} \frac{dx_1}{\Delta(x_2)} + \dots$$

Дифференцируя решение (2) $n-1$ раз по x и подставляя в него и в производные начальные данные, получим систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных с определителем $\Delta(x_0)$, отличным от нуля. Отсюда вытекает:

Теорема 1. *Если λ не является корнем уравнения $D_1(\lambda) = 0$, то при $x = x_0$ задача Коши для уравнения* (1) *имеет единственное решение, определяемое по формуле* (2), *где $F(\eta)$ находится из* (4).

Пусть λ является корнем уравнения $D_1(\lambda) = 0$ кратности r. Минор r-го порядка имеет вид:

$$D_1\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_r \\ y_1 y_2 \dots y_r \end{pmatrix} \lambda = \sum_{p_1 p_2 \dots p_r} G_{p_1}(y_1) G_{p_2}(y_2) \dots G_{p_r}(y_r) \, Д_1\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_r \\ y_1 y_2 \dots y_r \end{pmatrix} \lambda, \quad (5)$$

где каждое из чисел $p_1, p_2, \dots, p_r$ принимает любое значение из совокупности $0, 1, 2, \dots, m$, а

$$Д_1\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_r \\ y_1 y_2 \dots y_r \end{pmatrix} \lambda = \begin{vmatrix} K_{p_1}(x_1, y_1) & K_{p_2}(x_1, y_2) \dots & K_{p_r}(x_1, y_r) \\ K_{p_1}(x_2, y_1) & K_{p_2}(x_2, y_2) \dots & K_{p_r}(x_2, y_r) \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ K_{p_1}(x_r, y_2) & K_{p_2}(x_r, y_3) \dots & K_{p_r}(x_r, y_r) \end{vmatrix} +$$

$$+ \lambda \int_a^b dy_{r+1} \int_{x_0}^{y_{r+1}} \begin{vmatrix} K_{p_1}(x_1, y_1) \dots & K_{p_r}(x_1, y_r) & \{H_\nu(x_{r+1}, y_{r+1}) K_\nu(x_1, y_{r+1})\} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K_{p_1}(x_r, y_1) \dots & K_{p_r}(x_r, y_r) & \{H_\nu(x_{r+1}, y_{r+1}) K_\nu(x_r, y_{r+1})\} \\ K_{p_1}(x_{r+1}, y_1) \dots & K_{p_r}(x_{r+1}, y_2) & \{H_\nu(x_{r+1}, y_{r+1}) K_\nu(x_{r+1}, y_{r+1})\} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \frac{dx_{r+1}}{\Delta(x_{r+1})} + \dots$$

При помощи неравенства Адамара легко показать, что ряд (5) абсолютно сходится для всех значений параметра λ. Производную порядка r от $D_1(\lambda)$ можно представить так:

$$\frac{d^2 D_1(\lambda)}{d\lambda^2} = \int_a^b \dots \int_a^b dy_1 \dots dy_r \int_{x_0}^{y_1} \dots \int_{x_0}^{y_r} \sum_{p_1 p_2 \dots p_r} H_{p_1}(x_1, y_1) \dots H_{p_r}(x_r, y_r) \times$$

$$\times Д_1\begin{pmatrix} x_1 y_2 \dots x_r \\ y_1 y_2 \dots y_r \end{pmatrix} \lambda \frac{dx_1 \dots dx_r}{\Delta(x_1) \dots \Delta(x_r)}. \quad (6)$$

Из работы [2] следует, что если λ является корнем уравнения $D_1(\lambda) = 0$, то уравнение (3) будет иметь решение только тогда, когда при $x = x_0$ выполняются условия

$$\int_a^b G_0(y) K_0(x_0, y) dy = 0, \quad \int_a^b G_1(y) K_1(x_0, y) dy = 0, \dots$$

$$\dots, \int_a^b G_m(y) K_m(x_0, y) dy = 0, \quad (7)$$

а из (5) и (6) видно, что корень λ будет иметь ранг $q \leqslant r$, если

$$Д_1(x_1,\ y_1;\ \lambda)\equiv 0,\quad Д_1\begin{pmatrix}x_1x_2\\ y_1y_2\end{pmatrix}\lambda\equiv 0,\ \ldots,\ Д_1\begin{pmatrix}x_1x_2\ldots x_{q-1}\\ y_1y_2\ldots y_{q-1}\end{pmatrix}\lambda\equiv 0,$$

$$Д_1\begin{pmatrix}x_1x_2\ldots x_q\\ y_1y_3\ldots y_q\end{pmatrix}\lambda\not\equiv 0. \tag{8}$$

Из формулы (5) непосредственно следует, что

$$Д_1\begin{pmatrix}xx_2\ \ldots\ x_q\\ y_1y_2\ldots y_q\end{pmatrix}\lambda=D_1\begin{pmatrix}x_2x_3\ldots x_q\\ y_1y_3\ldots y_q\end{pmatrix}\lambda\{G_\nu(y_1)K_\nu(x,\ y_1)\}-$$

$$-D_1\begin{pmatrix}x_2x_3\ldots x_q\\ y_1y_3\ldots y_q\end{pmatrix}\lambda\{G_\nu(y_2)K_\nu(x,\ y_2)\}+\ldots+(-1)^{q+1}D_1\begin{pmatrix}x_2x_3\ldots x_q\\ y_2y_3\ldots y_{q-1}\end{pmatrix}\lambda\times$$

$$\times\{G_\nu(y_q)K_\nu(x,\ y_q)\}-\lambda\int_a^b dy\int_{x_0}^{y}\{H_\nu(\eta,\ y)K_\nu(x,y)\}D_1\begin{pmatrix}\eta x_2\ldots x_q\\ y_1y_2,\ldots y_q\end{pmatrix}\lambda\frac{d\eta}{\Delta(\eta)}. \tag{9}$$

Если при определенных значениях параметров $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_q$; $y_1\ y_2,\ \ldots,\ y_q$ (мы не вводим здесь особых обозначений) выполняются равенства (8), то при этих значениях параметров

$$D_1\begin{pmatrix}x_1x_2\ldots y_q\\ y_1y_2\ldots y_q\end{pmatrix}\lambda\neq 0$$

и, согласно (9), интегральное уравнение (3) будет иметь q решений

$$F_1(x)=\frac{D_1\begin{pmatrix}xx_2\ \ldots\ x_q\\ y_1y_2\ldots y_q\end{pmatrix}\lambda}{D_1\begin{pmatrix}x_1x_2\ldots x_q\\ y_1y_2\ldots y_q\end{pmatrix}\lambda},\ \ldots,\ F_q(x)=\frac{D_1\begin{pmatrix}x_1x_2\ldots x\\ y_1y_2\ldots y_q\end{pmatrix}\lambda}{D_1\begin{pmatrix}x_1x_2\ldots x_q\\ y_1y_2\ldots y_q\end{pmatrix}\lambda}. \tag{10}$$

Так как $F_i(x_k)=0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,q)$ при всех значениях k из последовательности чисел $1,\ 2,\ \ldots,q$, кроме $k=i$, а при $k=i$ $F_i(x_i)=1$, то функции $F_i(x)$ линейно независимы между собой. Так же как в теореме Фредгольма, доказывается полнота решений (10). В рассматриваемом случае общий интеграл уравнения (1) имеет вид:

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iz_i(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{H_0(\eta,\ x)}{\Delta(\eta)}[B_1F_1(\eta)+\ldots+B_qF_q(\eta)]\,d\eta, \tag{11}$$

где $B_1,\ B_2,\ \ldots,B_q$ — произвольные постоянные. Условия (7) представляют собой систему $m+1$ линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных $c_1,\ c_2,\ \ldots,c_n$. Если ранг матрицы этой системы равен m_1, то можно выразить m_1 произвольных постоянных через остальные постоянные. Теперь уже в общем интеграле (11) будет содержаться $n-m_1$ произвольных постоянных (не считая $B_1,\ \ldots,B_q$) и для их определения достаточно иметь $n-m_1$ начальных условий. Из изложенного вытекает теорема.

Теорема 2. *Если λ является корнем уравнения $D_1(\lambda)=0$ ранга q и ранг матрицы системы* (7) *равен m_1, то задача Коши для уравнения* (1) *решается по формуле* (11) *при $n-m_1$ начальных условиях, где функции $F_1(\eta),\ \ldots,F_q(\eta)$ представляют собой полную систему фундаментальных функций и определяются по формулам* (10) *и* (5). *В решении сохраняется q произвольных постоянных $B_1,\ \ldots,B_q$, т. е. задача Коши не имеет единственного решения.*

Если $m\geqslant n$, то, согласно работе [2], решение уравнения (1) сводится к решению интегрального уравнения

$$F(x)+\lambda\int_a^b\Big[\{G_\nu(y)K_\nu(x,y)\}+\int_{x_0}^{y}\{H_\nu^*(\eta,y)K_\nu(x,y)\}F^{(p+1)}(\eta)\frac{d\eta}{\Delta^*(\eta)}\Big]dy=0, \tag{12}$$

где
$$H_\nu^*(\eta,\ y)=\Delta_1^*(\eta)z_1^{(\nu)}(y)+\cdots+\Delta_n^*(\eta)z_n^{(\nu)}(y)+$$
$$+\Delta_{n+1}^*(\eta)z_{n+1}^{(\nu)}(y)+\cdots+\Delta_{m+1}^*(\eta)z_{m+1}^{(\nu)}(y), \qquad (5)$$
$$\Delta^*(\eta)=\begin{vmatrix} z_1(\eta) & z_2(\eta) & \dots & z_{m+1}(\eta) \\ z_1'(\eta) & z_2'(\eta) & \dots & z_{m+1}'(\eta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(m)}(\eta) & z_2^{(m)}(\eta) & \dots & z_{m+1}^{(m)}(\eta) \end{vmatrix},$$

$\Delta_1^*(\eta)$, $\Delta_2^*(\eta)$, $\dots$, $\Delta_{m+1}^*(\eta)$—миноры определителя $\Delta^*(\eta)$, взятые с их знаками,

$$z_{n+1}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{H_0(\eta,\ x)}{\Delta(\eta)}\,d\eta,$$

$$z_{n+2}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{H_0(\eta,\ x)}{\Delta(\eta)}\,\eta\,d\eta,\ \dots,\ z_{m+1}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{H_0(\eta,\ x)}{\Delta(\eta)}\,\eta^p\,d\eta.$$

Уравнение (12) имеет решение

$$F(x)=-\frac{\lambda}{D_1^*(\lambda)}\int_a^b D_1^*(x,\ y;\ \lambda)\,dy,$$

где $D_1^*(\lambda)$ и $D_1^*(x,\ y;\ \lambda)$ получаются из $D_1(\lambda)$ и $D_1(x,\ y;\ \lambda)$, если в них заменить все H_ν на H_ν^*, $\Delta(x)$ на $\Delta^*(x)$, а ядра на производные от них $(p+1)$-го порядка по первому аргументу, причем в функции $D_1^*(x,\ y;\ \lambda)$ сохраняется первое слагаемое, а в определителях замена ядер производится со второй строки. Если λ не является корнем уравнения $D_1^*(\lambda)=0$, то общий интеграл уравнения (1) имеет вид:

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iz_i(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\Delta_1^*(\eta)\,z_1(x)+\cdots+\Delta_{m+1}^*(\eta)\,z_{m+1}(x)}{\Delta^*(\eta)}\,F^{(p+1)}(\eta)\,d\eta.$$

В этом случае будет иметь место теорема 1. Если λ является корнем уравнения $D_1^*(\lambda)=0$ кратности r, то имеет место и теорема 2, причем минор $D_1^*\begin{pmatrix}x_1x_2\dots x_q\\ y_1y_2\dots y_q\end{pmatrix}\lambda$ получается из минора (5) так же, как $D_1^*(x,\ y;\ \lambda)$ из $D_1(x,\ y;\ \lambda)$, только здесь замена ядер в определителях на производные от них начинается с $(q+1)$-го столбца.

Если уравнение (1) с правой частью, то, согласно работе [2], решение его в случае, когда $m<n$, сводится к интегральному уравнению вида (3), а в случае, когда $m\geqslant n$, к уравнению вида (12). Здесь также будут иметь место теоремы 1 и 2.

Изложенный метод легко применим и к решению задачи Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения А. И. Некрасова [4], рассмотренной с иной точки зрения Я. В. Быковым [5] и Т. И. Вигриненко [6]. В этом случае нужно непосредственно пользоваться формулами А. И. Некрасова и их обобщениями.

Иркутский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
11 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Некрасов, Тр. ЦАГИ, № 190 (1934). [2] В. В. Васильев, Прикладн. матем. и мех., **15**, в. 5, 609 (1951). [3] В. И. Николенко, Усп. матем. наук, **7**, в. 5 (51), 225 (1952). [4] Т. И. Вигриненко, Зап. Ленинградск. горн. инст., **26**, в. 1, 141 (1952). [5] Я. В. Быков, ДАН, **86**, № 2, 221 (1952). [6] Т. И. Вигриненко, Тр. Инст. матем. и мех. АН Узб.ССР, **10**, в. 2, 85 (1953).