Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 5

МАТЕМАТИКА

М. М. ВАЙНБЕРГ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ В ПРОСТРАНСТВАХ L^q $(q \leqslant 2)$

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 XII 1954)

Пусть L^q есть пространство вещественных функций, суммируемых со степенью q на множество Ω конечной меры s-мерного евклидова пространства. Пусть, далее, A есть линейный оператор, который преобразует каждое ограниченное множество пространства L^q в компактное множество пространства L^p $(p \geqslant 2,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Мы будем предполагать, что оператор A, если его рассматривать в пространстве L^2, является самосопряженным. Примером такого оператора может служить линейный интегральный оператор

$$Au = \int_{\Omega} K(x, y)\, u(y)\, dy, \tag{1}$$

у которого симметричное ядро $K(x, y) \in L^p(\Omega \times \Omega)$. Рассмотрим билинейную $J(u, v) = (Au, v)$ и квадратичную $J(u, u) = (Au, u)$ формы, где $u, v \in L^q$, причем

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x)\, \psi(x)\, dx, \qquad \varphi \in L^p, \qquad \psi \in L^q.$$

Хорошо известно, какую важную роль играет квадратичная форма $J(u, u)$ в теории линейных интегральных уравнений. Свойства квадратичной формы $J(u, u)$ достаточно изучены в пространстве L^2 и в гильбертовом пространстве.

В настоящей заметке мы исследуем форму $J(u, u)$ в пространстве L^q $(1 \leqslant q \leqslant 2)$ и устанавливаем для нее ряд свойств, которые играют существенную роль как при исследовании оператора A, так и при исследовании произведения операторов AF, где F есть нелинейный потенциальный (1) оператор, действующий из пространства L^p в пространство L^q.

В качестве приложения полученных свойств функционала $J(u, u)$ мы рассматриваем некоторые вопросы нелинейного анализа и устанавливаем новые предложения.

1. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(|\lambda_i| \leqslant |\lambda_{i+1}|)$ и $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ характеристические числа и соответствующие им собственные функции оператора A, если его рассматривать в L^2. Так как A действует из L^q в L^p, то для всякого k $\varphi_k \in L^p$. Положим

$$A_n u = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\varphi_k, u)}{\lambda_k} \varphi_k(x); \qquad J_n(u, u) = (A_n u, u); \qquad u \in L^q.$$

Используя эти и предыдущие обозначения, мы сформулируем следующее основное предложение:

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Самосопряженный в L^2 оператор A имеет бесконечное число положительных и конечное число отрицательных характеристических чисел.*

2) *A преобразует каждое ограниченное множество пространства L^q в компактное множество пространства L^p ($p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$).*

Тогда имеют место следующие утверждения:

1°. *Квадратичная форма $J(u, u)$ слабо непрерывна в L^q, а значит, она достигает своих граней в любом шаре D ($\| u \| \leqslant r$) пространства L^q.*

2°. *Для всякого $u \in L^q$* $\lim\limits_{n\to\infty} J_n(u, u) = J(u, u)$.

3°. $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$, *где*

$$\mu_n = \max_D [J(u, u) - J_n(u, u)].$$

Для доказательства утверждения 1° сначала непосредственно устанавливается, что для всяких $u, v \in L^q$ $J(u, v) = J(v, u)$, откуда следует, что $\operatorname{grad} J(u, u) = 2Au$, а затем используется теорема 2.2 работы ([1]). Утверждение 2° следует из неравенства

$$J_n(u, u) \leqslant J_{n+1}(u, u) \leqslant J(u, u), \quad u \in L^q, \tag{2}$$

которое справедливо для всякого $n \geqslant n_0$, где n_0 — некоторое натуральное число, и из условия

$$|J_n(u_2, u_2) - J_n(u_1, u_1)| \leqslant \beta \| u_2 - u_1 \|, \quad u_1, u_2 \in D, \tag{3}$$

где постоянная β зависит от радиуса r шара D, но не зависит от n. Неравенство (2) устанавливается непосредственно, а при доказательстве неравенства (3) используется теорема 2.2 ([1]). При доказательстве утверждения 3° мы пользуемся следующей леммой:

Лемма. *Пусть в слабо полном банаховом пространстве E, в котором всякое ограниченное множество слабо компактно, задана монотонная последовательность слабо непрерывных функционалов $\{f_n(u)\}$. Тогда, если в некотором шаре D ($\| u \| \leqslant r$) пространства E последовательность $\{f_n(u)\}$ сходится к слабо непрерывному функционалу $f(u)$, то $\{f_n\}$ сходится в D равномерно к $f(u)$.*

Если абсолютное значение оператора A удовлетворяет условию 2 теоремы 1, то утверждения этой теоремы сохраняются при отказе от требования, чтобы знаки характеристических чисел оператора A, начиная с некоторого их номера, были одинаковы. Отметим еще, что теорема 1 легко распространяется на тот случай, когда $\operatorname{mes} \Omega = \infty$.

Приведем некоторые приложения теоремы 1.

2. Рассмотрим семейство функций

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k \operatorname{sign} \lambda_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k(x), \quad \| \xi \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 \right)^{1/2} \leqslant c, \tag{4}$$

которое представляет собою определенный в L^2 главный квадратный корень ([4]) $A^{1/2}u$ из оператора A для тех $u \in L^2$, для которых $\| u \| \leqslant c$. Это семейство функций, которое при выполнении условий теоремы 1 принадлежит пространству L^p, было нами исследовано в ряде работ.

При доказательстве того, что семейство (4) компактно в L^p, было существенно использовано (1) требование, чтобы ряд (4) сходился в L^p равномерно относительно $\xi \in D_1$ ($\| \xi \| \leqslant 1$). Можно показать, что это требование эквивалентно следующему условию: каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое n_0, что для всякого $n \geqslant n_0$ и любого натурального m выполняется неравенство

$$J_{n+m}(u, u) - J_n(u, u) < \varepsilon \tag{5}$$

относительно u, принадлежащих шару $\| u \| \leqslant r$ пространства L^q. Так как последнее условие прямо следует из утверждения 3° теоремы 1, то мы приходим к следующей теореме:

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *определенный в* L^2 *главный квадратный корень* (4) $A_{1/2}$ *из оператора* A *вполне непрерывно действует из пространства* L^2 *в пространство* L^p.

Отметим, что в формулировке теоремы 2 можно заменить оператор $A_{1/2}$ положительным квадратным корнем из абсолютного значения A.

3. При исследовании интегральных операторов типа Гаммерштейна важную роль играет свойство слабой непрерывности функционала $f(\xi)$ (1–3). Использование теоремы 1 приводит к выводу что функционал $f(\xi)$ и его градиент $F(\xi)$ слабо непрерывны, если ядра $K(x, y)$, которые входят в определение функционала $f(\xi)$, таковы, что порождаемые ими интегральные операторы (1) удовлетворяют лишь условиям теоремы 1. Это условие слабой непрерывности $f(\xi)$ и $F(\xi)$ показывает, что все теоремы § 3 работы (3) и теорема 3 работы (4) сохраняются, если в их формулировке заменить требование о сходимости в L^p вырожденных ядер $K_{lm}(x, y)$ к ядру $K_l(x, y)$ следующим требованием: каждый интегральный оператор (1), определяемый ядром $K_l(x, y)$, удовлетворяет лишь условиям теоремы 1. Таким образом, теорема 1 приводит к уточнению теорем § 3 работы (3), которые после этого уточнения дают окончательный ответ на вопрос о собственных функциях нелинейных операторов типа Гаммерштейна с симметричными ядрами (у которых все характеристические числа, начиная с некоторого номера, имеют одинаковые знаки), если эти операторы действуют в пространствах $L_{p,n}$ ($p \geqslant 2$).

Сделаем еще следующее замечание. Так как каждая функция семейства (4) есть спектральное разложение в L^2 оператора $A_{1/2}u$, где $\| u \| \leqslant c$, то выкладки, которые при помощи функционала $f(\xi)$ приводят к теоремам существования для операторов Гаммерштейна, могут быть записаны иначе, причем отдельные промежуточные результаты этих выкладок могут быть сформулированы не в терминах пространства $l_{2,n}$, как это сделано в работах (2–4), а в терминах пространства $L_{2,n}$ (5). Иная запись выкладок и формулировка их промежуточных результатов в виде отдельного принципа для случая непозитивных ядер возможны не только при $n = 1$ (6), но при $n > 1$. В случае непозитивных (индефинитных) ядер нужно вместо гиперболоида в пространстве $l_{2,n}$ рассматривать соответствующий ему гиперболоид в пространстве $L_{2,n}$.

4. Из утверждения 1° теоремы 1, которое сохраняется для произвольного самосопряженного (дефинитного или индефинитного) оператора, удовлетворяющего условию 1 теоремы 1, имеем:

$$\mu^{(1)} = \min_{\| u \| = 1} J(u, u) = J(u^{(1)}, u^{(1)});$$

$$\mu^{(2)} = \max_{\| u \| = 1} J(u, u) = J(u^{(2)}, u^{(2)}),$$

причем $\mu^{(1)} < 0$, если среди характеристических чисел оператора A имеются отрицательные, и $\mu^{(2)} > 0$, если среди характеристических

чисел A имеются положительные. Отсюда, согласно теореме А ([7]) Л. А. Люстерника, следует, что

$$\mu^{(i)} |u^{(i)}(x)|^{q-1} \operatorname{sign} u^{(i)}(x) = Au^{(i)} \quad (i = 1, 2),$$

где $u^{(i)} \in L^q$ и $\| u^{(i)} \| = 1$. Все другие собственные значения уравнения

$$\mu |u(x)|^{q-1} \operatorname{sign} u(x) = Au, \tag{6}$$

отвечающие его собственным функциям с единичной нормой в L^q, принадлежат отрезку $[\mu^{(1)}, \mu^{(2)}]$. Отметим, что уравнение (6) было рассмотрено В. И. Соболевым ([8]) в предположении дефинитности оператора (1).

5. Из утверждения 2° теоремы 1 следует

Теорема 3. *Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы* 1, *то для всякой функции $u \in L^q$ имеет место теорема Гильберта — Шмидта,*

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi_i, u)}{\lambda_i} \varphi_i(x),$$

где ряд сходится к Au в смысле метрики пространства L^p $(p \geqslant 2,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

Московский областной
педагогический институт

Поступило
15 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Вайнберг, Усп. матем. наук, **7**, № 4 (50), 55 (1952). [2] М. М. Вайнберг, Матем. сборн., **32** (74):3, 665 (1953). [3] М. М. Вайнберг, Тр. Моск. матем. общ., **3**, 375 (1953). [4] М. М. Вайнберг, ДАН, **92**, № 3, 457 (1953). [5] М. М. Вайнберг, Усп. матем. наук, **6**, № 4 (44), 157 (1951). [6] М. А. Красносельский, А. И. Поволоцкий, ДАН, **91**, № 1, 19 (1953). [7] М. М. Вайнберг, Усп. матем. наук, **7**, № 2 (48), 197 (1952). [8] В. И. Соболев, ДАН, **31**, № 8, 734 (1941).