Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 6

МАТЕМАТИКА

С. Н. ЧЕРНИКОВ

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 X 1954)

Решение $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ системы

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \qquad (1)$$

назовем неотрицательным (неположительным), положительным (отрицательным), строго положительным (строго отрицательным) относительно совокупности неизвестных $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_l}$, если оно при $i = 1, 2, \ldots, l$ удовлетворяет, соответственно, условиям: а) $x_{k_i}^0 \geqslant 0$ $(x_{k_i}^0 \leqslant 0)$;

б) $x_{k_i}^0 \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{l} x_{k_i}^0 > 0$ $\left(x_{k_i}^0 \leqslant 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{l} x_{k_i}^0 < 0\right)$; в) $x_{k_i}^0 > 0$ $(x_{k_i}^0 < 0)$;

если $l = n$, то решение $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ называется просто неотрицательным (неположительным), положительным (отрицательным), строго положительным (строго отрицательным). В настоящей статье даются некоторые признаки существования такого рода решений как у системы линейных неравенств, так и у системы линейных уравнений, вытекающие из предположения о совместности систем линейных неравенств, содержащегося в работе автора [1]. Отдельные вопросы, связанные с существованием положительных решений у систем линейных уравнений, изучались Штимке [2], Дайнсом [3] * и Гаммэ [4].

1. Отличный от нуля минор Δ матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных системы (1), назовем узловым минором этой системы, если отношения к нему всех сопровождающих его определителей, т. е. определителей, полученных окаймлением его при помощи произвольной строки матрицы A и столбца свободных членов a_j системы (1), неотрицательны. Узловой минор системы (1) будем называть неотрицательно (неположительно) ориентированным относительно неизвестного x_k, если выполняется одно из двух следующих условий: 1) ни один из коэффициентов при x_k системы (1) не содержится среди элементов минора Δ; 2) отношение к минору Δ определителя, получающегося из него заменой столбца коэффициентов при x_k столбцом соответствующих свободных членов системы (1), неотрицательно (неположительно). Если узловой минор Δ системы (1) неотрицательно (неположительно) ориентирован относительно каждого из неизвестных $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_l}$, то назовем его неотрицательно (неположительно) ориентированным относительно совокупности этих неизвестных.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (1) *обладала хотя бы одним решением, неположительным относительно совокупности*

* С работой Дайнса автору ознакомиться не удалось.

неизвестных $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_l}$ $(0 \leqslant l \leqslant n)$ *и неотрицательным относительно совокупности других неизвестных* $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$ $(0 \leqslant t \leqslant n)$, *необходимо и достаточно выполнение по крайней мере одного из двух следующих условий*: 1) *все свободные члены* a_j *системы* (1) *неотрицательны*; 2) *хотя бы один минор матрицы системы* (1) *является узловым минором этой системы, ориентированным неположительно относительно совокупности неизвестных* $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_l}$ *и неотрицательно относительно совокупности неизвестных* $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$.

Примечание. Хотя бы одно из чисел l и t предполагается отличным от нуля.

Для нахождения хотя бы одного решения системы (1), удовлетворяющего требованиям теоремы 1, служит

Теорема 1а. *Если* $\Delta = |a_{j_k i_l}|$ $(k, l = 1, 2, \ldots, h)$ *узловой минор системы* (1), *неположительно ориентированный относительно совокупности неизвестных* $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_l}$ *и неотрицательно относительно совокупности других неизвестных* $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$, *то решение системы*

$$a_{j_k i_1} x_{i_1} + a_{j_k i_2} x_{i_2} + \ldots + a_{j_k i_h} x_{i_h} - a_{j_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, h)$$

может быть дополнено нулями до решения системы (1), *удовлетворяющего требованиям теоремы* 1.

2. Пусть Δ — узловой минор системы (1), ориентированный неположительно (неотрицательно) относительно неизвестного x_k, и $s_1, s_2, \ldots, s_m$ — некоторая совокупность чисел. Назовем последнюю Δ-допустимой относительно неизвестного x_k, если выполняются два условия: 1) ни один равный нулю сопровождающий Δ определитель системы (1) не приобретает знака, противоположного знаку минора Δ (не приобретает знака минора Δ) при подстановке в него чисел $s_1, s_2, \ldots, s_m$ вместо элементов $a_1, a_2, \ldots, a_m$; 2) либо минор Δ содержит столбец, определяемый коэффициентами при x_k из системы (1), и при замене элементов этого столбца соответствующими свободными членами a_j обращается в нуль, а при замене соответствующими числами s_j — в определитель Δ^*, удовлетворяющий соотношению $\Delta^*/\Delta \leqslant 0$, либо не обращается в нуль при первой замене или вовсе не содержит столбца из коэффициентов при x_k.

Совокупность $s_1, s_2, \ldots, s_m$, Δ-допустимую относительно каждого из $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ (с одним и тем же Δ), назовем Δ-допустимой относительно совокупности этих неизвестных.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (1) *обладала хотя бы одним решением, строго отрицательным (строго положительным) относительно совокупности неизвестных* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *и неположительным (неотрицательным) относительно совокупности других неизвестных* $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$ $(0 \leqslant t \leqslant n-1)$, *необходимо и достаточно выполнение по крайней мере одного из двух следующих условий:* 1) $a_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *и при* $a_j = 0$ $s_j = \sum_{i=1}^{k} a_{jn_i} \geqslant 0$ (*соответственно*, $s_j \leqslant 0$ — *во втором варианте теоремы*); 2) *система* (1) *обладает хотя бы одним таким неположительно (неотрицательно) ориентированным относительно совокупности неизвестных* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ *и* $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$ *узловым минором* Δ, *что совокупность чисел* $s_j = \sum_{i=1}^{k} a_{jn_i}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ Δ-*допустима относительно совокупности этих неизвестных.*

Следствие. *Для того чтобы система* (1) *обладала хотя бы одним отрицательным (положительным) относительно совокупности неизвестных* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ $(k \leqslant n)$ *решением, необходимо и достаточно выполнение по крайней мере одного из двух следующих условий:* 1) $a_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, *причем среди чисел* $1, 2, \ldots, k$ *существует по крайней мере одно такое число* k_0, *что для каждого* $a_j = 0$ *имеет место неравенство* $a_{jn_{k_0}} \geqslant 0$ *(соответственно,* $a_{jn_{k_0}} \leqslant 0$ *во втором варианте теоремы);* 2) *система* (1) *обладает хотя бы одним таким неположительно (неотрицательно) ориентированным относительно совокупности неизвестных* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ *узловым минором* Δ, *что по крайней мере для одного* $i = 1, 2, \ldots, k$ *совокупность* $a_{1n_i}, a_{2n_i}, \ldots, a_{mn_i}$ Δ*-допустима относительно совокупности этих неизвестных.*

3. Так как произвольная система линейных уравнений

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

равносильна, очевидно, системе линейных неравенств

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j \leqslant 0,$$
$$-a_{j1}x_1 - a_{j2}x_2 - \ldots - a_{jn}x_n - (-a_j) \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

то сформулированные выше предложения могут быть модифицированы для систем линейных уравнений.

Если условиться называть узловым минором системы (2) такой минор Δ матрицы этой системы, что все сопровождающие Δ определители рассматриваемой системы равны нулю, и сохранить для систем линейных уравнений приведенное выше определение ориентированности узловых миноров, то модификацией теоремы 1 будет

Теорема 3. *Для того чтобы система линейных уравнений* (2) *обладала хотя бы одним решением, неположительным относительно совокупности неизвестных* $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_l}$ $(0 \leqslant l \leqslant n)$ *и неотрицательным относительно совокупности других неизвестных* $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$ $(0 \leqslant t \leqslant n)$, *необходимо и достаточно выполнение по крайней мере одного из двух следующих условий:* 1) *все свободные члены системы* (2) *равны нулю;* 2) *система* (2) *обладает хотя бы одним узловым минором, ориентированным неположительно относительно первой совокупности и неотрицательно относительно второй.*

Уточнение этого предложения дает

Теорема 3а. *Если система* (2) *линейных уравнений, имеющая ранг* $r > 0$ (r *— ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных системы* (2)), *обладает хотя бы одним узловым минором, удовлетворяющим условию теоремы* 3, *то она обладает и узловым минором порядка* r, *удовлетворяющим этому условию.*

Следствие теорем 3 и 3а. *Для того чтобы система* (2) *линейных уравнений ранга* $r > 0$ *имела хотя бы одно неположительное (неотрицательное) решение, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно неположительное (неотрицательное) решение имела по крайней мере одна из систем ранга* r, *полученных из системы* (2) *вычеркиванием всех ее членов, содержащих некоторые заданные* $n - r$ *неизвестных.*

Из этого предложения и работы [1] (см. теорему 9) нетрудно вывести следующее предложение, дающее уточнение теоремы Хаара [1].

Если неравенство

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n - b_{n+1} \leqslant 0$$

является следствием системы неравенств (1) ранга r, то она будет также следствием хотя бы одной ее подсистемы ранга r.

Пусть Δ — узловой минор системы (2), ориентированный неположительно (неотрицательно) относительно некоторого ее неизвестного x_k, и $s_1, s_2, \ldots, s_m$ — некоторая совокупность чисел. Назовем последнюю вполне Δ-допустимой относительно неизвестного x_k, если она удовлетворяет условиям приведенного выше определения Δ-допустимости и если минор Δ остается узловым минором системы (2) при замене ее свободных членов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, соответственно, числами $s_1, s_2, \ldots, s_m$.

Если существует такой узловой минор Δ системы (2), что совокупность чисел $s_1, s_2, \ldots, s_m$ вполне Δ-допустима относительно каждого из неизвестных $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$, то назовем ее вполне Δ-допустимой относительно совокупности этих неизвестных.

Теорема 4. *Для того чтобы система линейных уравнений* (2) *обладала хотя бы одним решением, строго отрицательным (строго положительным) относительно совокупности неизвестных* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *и неположительным (неотрицательным) относительно совокупности других неизвестных* $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$ $(0 \leqslant t \leqslant n-1)$, *необходимо и достаточно выполнение по крайней мере одно из двух следующих условий:*

1) $a_j = 0$ и $s_j = \sum_{i=1}^{k} a_{jn_i} = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$; 2) *система* (2) *обладает хотя бы одним таким неположительно (неотрицательно) ориентированным относительно совокупности неизвестных* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ *и* $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$ *узловым минором* Δ, *что совокупность* $s_1, s_2, \ldots, s_m$ *вполне* Δ-*допустима относительно совокупности этих неизвестных.*

Следствие. *Для того чтобы система* (2) *линейных уравнений обладала хотя бы одним отрицательным (положительным) относительно совокупности неизвестных* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ $(k \leqslant n)$ *решением, необходимо и достаточно выполнение по крайней мере одного из следующих условий:*

1) $a_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, *причем среди чисел* $1, 2, \ldots, k$ *существует по крайней мере одно такое число* k_0, *что для каждого* $j = 1, 2, \ldots, m$ *имеет место равенство* $a_{jn_{k_0}} = 0$;

2) *система* (2) *обладает хотя бы одним таким неположительно (неотрицательно) ориентированным относительно совокупности неизвестных* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ *узловым минором* Δ, *что по крайней мере для одного* $i = 1, 2, \ldots, k$ *совокупность* $a_{1n_i}, a_{2n_i}, \ldots, a_{mn_i}$ *вполне* Δ-*допустима относительно совокупности этих неизвестных.*

При $k = n$ из теоремы 4 и следствий теорем 4, 3 и 3а вытекает

Теорема 5. *Для того чтобы система линейных однородных уравнений ранга* $r > 0$ $(r$ — *ранг матрицы системы) с числом неизвестных* $n > r$ *обладала хотя бы одним отрицательным (положительным) решением, необходимо и достаточно, чтобы отрицательным (положительным) решением обладала по крайней мере одна из систем ранга* r *с* $r+1$ *неизвестными, полученных из нее вычеркиванием всех ее членов, содержащих некоторые заданные* $n-r-1$ *неизвестных.*

Молотовский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
19 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, Усп. матем. наук, 8, в. 2 (54), 7 (1953). [2] E. Stiemke, Math. Ann., **76**, 2—3, 340 (1915). [3] L. L. Dines, Ann. of Math., **28**, 386 (1927). [4] C. F. Gummer, Am. Math. Monthly, **33**, 488 (1926).