Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 6

МАТЕМАТИКА

М. К. ФАГЕ

ПРИВЕДЕНИЕ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 X 1954)

Введение. Дифференциальный оператор

$$L(y) = y'' + q(x)y \tag{1}$$

с непрерывной $q(x)$, $0 \leqslant x < +\infty$, рассматриваем на линеале Φ функций $y(x)$, $0 \leqslant x < +\infty$, дважды непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих условиям

$$y(0) = y'(0) = 0. \tag{2}$$

$f = L(y)$ преобразует Φ в линеал C непрерывных функций $f(x)$, $0 \leqslant x < +\infty$; обратный оператор $y = L^{-1}f = Af$ есть интегральный оператор с ядром $A(x, s)$ $(x \geqslant s \geqslant 0)$ — функцией влияния задачи (1), (2). Простейшим оператором L будет $L^{(0)} = d^2/dx^2$, имеющий обратный $A^{(0)}$ с ядром $x - s$. Цель этой заметки состоит в доказательстве эквивалентности произвольного оператора L простейшему $L^{(0)}$.

§ 1. Решение одной проблемы моментов. Пусть $A_n(x,s)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — повторные ядра ядра $A(x, s) = A_1(x, s)$.

Теорема 1. *Существует функция $h(x, s; u)$, непрерывная по совокупности своих аргументов в области $0 \leqslant s \leqslant x < +\infty$, $0 \leqslant u \leqslant x - s$, равная 1 при $u = x - s$, имеющая непрерывную в той же области частную производную $dh/du = -k(x, s; u)$ и такая, что*

$$A_n(x, s) = \int_0^{x-s} \frac{u^{2n-2}}{(2n-2)!} h(x, s; u)du =$$

$$= \frac{(x-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \int_0^{x-s} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} k(x, s; u)\, du, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Доказательство. Следуя с некоторыми упрощениями схеме, описанной в [1], т. е. сводя данную степенную проблему моментов к показательной, построим функцию

$$B(x, s; w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\, A_n(x,s)}{w^{2n+1}}, \tag{4}$$

зависящую от комплексного параметра w и являющуюся обобщенным преобразованием Бореля показательной функции $\exp(zA)$ от оператора A без начального члена. Из оценок для $A_n(x, s)$, приведенных

в [1], следует, что ряд (4) сходится при $|w|>x-s$. Легко проверить, что он удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 B}{\partial w^2}-\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}-q(x)B=0 \tag{5}$$

в области $x\geqslant s$, $|w|>x-s$, и следующим начальным условиям:

$$B(x,s;w)\Big|_{x=s}=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}B(x,s;w)\Big|_{x=s}=\frac{2}{w^3}. \tag{6}$$

Решая систему (5), (6) по способу Римана*, получаем

$$B(x,s;w)=2\int_0^{x-s}(w+x-s-2\nu)^{-3}S(x,s;x-s-\nu,\nu)\,d\nu, \tag{7}$$

где $S(x,s;\mu,\nu)$ есть функция Римана уравнения (5), определяемая в треугольнике $\{\mu\geqslant 0,\ \nu\geqslant 0,\ \mu+\nu\leqslant x-s\}$ из интегрального уравнения

$$S(x,s;\mu,\nu)=1-\int_0^{\mu}\int_0^{\nu}q(x-\mu'-\nu')\,S(x,s;\mu',\nu')\,d\mu'\,d\nu'.$$

Раскладывая (7) в ряд Лорана при $|w|>|x-s-2\nu|$, вводя $n=2\nu-x+s$ и сравнивая с (4), приходим к (3), где

$$h(x,s;u)=S\Big(x,\ s;\frac{x-s-u}{2},\ \frac{x-s+u}{2}\Big).$$

Теорема 2. *Функция $k(x,s;u)$ удовлетворяет следующему уравнению $(u+v\leqslant x-s)$:*

$$K(x-u,s;v)+K(x,s+v;u)+\int_{s+v}^{x-u}K(x,t;u)\,K(t,s;v)\,dt=K(x,s;u+v). \tag{8}$$

Доказательство получается из (3) сравнением двух выражений для $A_{m+n}(x,s)$, $m,n=1,2,\ldots$

§ 2. Преобразование линеалов. Каждой функции $f(u)\in C$ поставим в соответствие функцию двух переменных

$$F(x,s)=f(x-s)+\int_0^{x-s}f(u)\,k(x,s;u)\,du\quad(x\geqslant s\geqslant 0), \tag{9}$$

которую будем рассматривать как ядро вольтерровского оператора F; обозначим его $f(A)$. Из теоремы 2 следует:

Теорема 3. *Операторы $F=f(A)$ образуют коммутативное кольцо, изоморфное кольцу волтерровских операторов $\tilde{F}$ с ядром $f(x-s)$, зависящим от разности, т. е. кольцу функций $f(u)$ со свертыванием в качестве умножения.*

Введем вольтерровский оператор M с ядром $M(x,u)=k(x,0;u)$, $0\leqslant\mu\leqslant x<+\infty$. Полагая в (9) $s=0$ и обозначая $F(x,0)$ через $\varphi(x)$, получаем некоторую формулу преобразования

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x M(x,u)\,f(u)du \tag{10}$$

---

* В комплексно-вещественном пространстве, см. [2].

или, сокращено, $\varphi = f + Mf = Hf$, имеющую обращение

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x N(x, u)\,\varphi(u)\,du, \tag{11}$$

или, сокращенно, $f = \varphi + N\varphi = H^{-1}\varphi$, где вольтерровский оператор N с ядром $N(x, u)$ связан с M уравнением

$$N(x, u) + M(x, u) + \int_u^x N(x, t)\,M(t, u)\,dt = 0,$$

которое определяет их однозначно друг через друга. Легко показать, что формулы (10), (11) преобразуют взаимно-однозначно и взаимно-обратно на себя каждый из линеалов C, Φ.

§ 3. Эквивалентность. Теорема 3 и связь формул (10), (11) с (9) приводят к основному результату:

Теорема 4. *Если в линеале функций $\varphi(x)$ задан оператор F с ядром* (9): $\varphi_2 = F\varphi_1$, *то преобразованные функции $f_1 = H^{-1}\varphi_1$ и $f_2 = H^{-1}\varphi_2$ связаны между собою оператором $\tilde{F}$ с ядром $f(x-s)$, зависящим от разности: $f_2 = \tilde{F}f_1$, и наоборот, т. е.*

$$F = H\tilde{F}H^{-1}, \quad \tilde{F} = H^{-1}FH. \tag{12}$$

Применяя теорему 4 к $F(x, s) = A(x, s)$, когда, в силу (3), $f(u) = u$, получим по формуле (12):

$$A = HA^{(0)}H^{-1}. \tag{13}$$

Переходя к обратным операторам, имеем

$$L = H\frac{d^2}{dx^2}H^{-1}, \tag{14}$$

т. е. получаем:

Следствие. *Всякий дифференциальный оператор 2-го порядка $L(y) = y'' + q(x)y$ в линеале Φ обратимым преобразованием Φ по формулам* (10), (11) *превращается в простейший — двукратное дифференцирование.*

§ 4. Семейство собственных сдвигов для задачи Коши. Введем в C операторы сдвига *

$$(P_u\psi)(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < u, \\ \psi(x-u) & \text{при } x \geqslant u. \end{cases} \quad (0 \leqslant u < +\infty)$$

Тогда, очевидно, для оператора $\tilde{F}$ с ядром $f(x-s)$ можно написать

$$(\tilde{F}\psi)(x) = \int_0^x f(x-s)\,\psi(s)\,ds = \int_0^x f(u)\,\psi(x-u)\,du = \int_0^\infty f(u)\,[(P_u\psi)(x)]\,du.$$

В этом и только в этом смысле мы напишем разложение по сдвигам

$$\tilde{F} = \int_0^\infty f(u)\,P_u\,du \tag{15}$$

всякого вольтерровского оператора $\tilde{F}$ с непрерывным ядром $f(x-s)$, зависящим от разности. Семейство $\{P_u\}$ удовлетворяет очевидному соотношению

$$P_u P_v = P_{u+v} \quad (0 \leqslant u, v < +\infty), \tag{16}$$

и тот факт, что умножению операторов $\tilde{F}$ соответствует свертка соот-

* Выводящие из C в линеал кусочно-непрерывных функций, заданных на $[0, \infty)$.

ветствующих ядер $f(x-s)$, можно считать следствием формул (15) и (16)*.

Введем далее операторы K_u с ядром

$$K_u(x, s) = \begin{cases} 0 & \text{при } x-s<u, \\ K(x, s; u) & \text{при } x-s \geqslant u \end{cases} \quad (0 \leqslant x, s, u < +\infty)$$

и, наконец, операторы $Q_u = P_u + K_u$. Из (16) и (8) следует

Теорема 5. *Операторы Q_u удовлетворяют соотношению*

$$Q_u Q_v = Q_{u+v} \quad (0 \leqslant u,\ v < +\infty). \tag{17}$$

Второе слагаемое формулы (9) можно записать в виде

$$\int_0^\infty f(u) K_u(x, s)\, du, \tag{18}$$

и тогда из (9), (15) и (18) получаем представление операторов F теоремы 3:

$$F = \int_0^\infty f(u) Q_u\, du \tag{19}$$

в смысле, аналогичном тому, какой имела формула (15), т. е. для всякой непрерывной функции $\psi(x) \in C$ будет

$$(F\psi)(x) = \int_0^\infty f(u) [(Q_u \psi)(x)]\, du;$$

теорему 3 можно считать следствием формул (17) и (19).

В частности, из (3) получим

$$A^n = \int_0^\infty \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} Q_u\, du \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е. A^n представляется через Q_u так же, как для простейшей задачи $A^{(0)n}$ через обыкновенные сдвиги P_u. В связи с этим назовем Q_u собственными сдвигами данной задачи Коши.

Из соотношения (8) получаем эквивалентность Q_u с обычными сдвигами P_u (т. е. с собственными сдвигами простейшей задачи)

$$Q_u = H P_u H^{-1}, \tag{20}$$

и формулы (12) можно считать следствием формул (15), (19) и (20).

Заключение. Подобно тому как задача Штурма — Лиувилля порождает совокупность «собственных» проекторов — спектральное семейство задачи, так задача Коши порождает семейство собственных сдвигов, зависящее от параметра u, пробегающего полупрямую $[0, \infty)$ — «спектр» задачи Коши**.

Черновицкий
государственный университет

Поступило
30 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. К. Фаге, ДАН, 95, № 4, 721 (1954). [2] М. К. Фаге, ДАН, 96, № 5, 929 (1954). [3] J. G. Mikusiński, Studia Math., No. 11, 41 (1949).

* Заметим в связи с этим, что Микусинский ([3]) прямо называет операторами элементы кольца функций со сверткой в качестве умножения (а также элементы поля дробей, построенного над этим кольцом).

** Так как в основу построения положена показательная функция $\exp(zA)$, имеющая по z порядок роста $1/3$ (см. ([1])), то это „спектр порядка $1/3$“, в отличие от обычного спектра (например, у самосопряженного оператора) — „спектра порядка 1“.