Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 6

МАТЕМАТИКА

А. Т. ТАЛДЫКИН

К ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ У ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 IX 1954)

В работе ([1]) нами были сформулированы условия существования собственного значения у ограниченного линейного оператора (определенного в комплексном гильбертовом пространстве H) в его круге Фредгольма и условия, при которых оператор имеет полную систему собственных и присоединенных элементов, принадлежащих собственным значениям оператора в его круге Фредгольма.

Для того чтобы ограниченный линейный оператор A имел в своем круге Фредгольма радиуса r_A хотя бы одно собственное значение, необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой элемент f из H и число $\varepsilon_f > 1/r_A$, что выполняется неравенство

$$\| A^n f \| \geqslant \varepsilon_f^n \| f \| \tag{1}$$

хотя бы для некоторой бесконечной подпоследовательности натуральных n.

Соответственно, для того, чтобы ограниченный линейный оператор A^* имел полную систему собственных и присоединенных элементов, принадлежащих собственным значениям в его круге Фредгольма, необходимо и достаточно, чтобы для каждого f из H нашлось такое число $\varepsilon_f > 1/r_A$, что выполняется неравенство (1).

В случае, когда полюсы резольвенты оператора A все простые, последняя теорема трактует о полноте системы, состоящей только из собственных элементов оператора.

В той же работе указано на возможность перенесения этих теорем на неограниченные операторы, имеющие ограниченный обратный оператор.

Выскажем здесь несколько суждений о существовании собственных значений и о полноте системы собственных элементов у линейных операторов вида AB и BA.

Теорема 1. *Если оператор $A = CC_1$, где C, C_1, а следовательно и A,— ограниченные линейные операторы, имеет собственное значение в своем круге Фредгольма радиуса r_A, то и оператор $B = C_1C$ имеет в том же круге хотя бы одно собственное значение.*

В самом деле, по условию, существует элемент f из H и число $\varepsilon_f > 1/r_A$ такие, что

$$\| A^n f \| = \| (CC_1)^n f \| \geqslant \varepsilon_f^n \| f \|$$

хотя бы для некоторой бесконечной подпоследовательности натуральных n. При этом, конечно, $C_1 f \neq 0$. Но

$$\| A^n f \| = \| (CC_1)^n f \| = \| C (C_1 C)^{n-1} C_1 f \| = \| CB^{n-1} C_1 f \| \leqslant \| C \| \cdot \| B^{n-1} C_1 f \|,$$

и поэтому

$$\| B^{n-1} Cf\| \geqslant \frac{1}{\| C\|} \varepsilon_f^n \| f \|. \qquad (*)$$

Если оператор B не имеет собственного значения в круге радиуса r_A с центром в начале координат, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n B^n$ для его резольвенты сходится по норме операторов в этом круге и радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} B^n C_1 f$ должен быть не меньше r_A.

Но в силу неравенства (*) он не больше $1/\varepsilon_f < r_A$ и, следовательно, оператор B имеет в указанном круге хотя бы одно собственное значение.

Следствие. Если оператор $A = C_1 C_2 \ldots C_m$, где $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — ограниченные линейные операторы, имеет в своем круге Фредгольма собственное значение, то и любой оператор, полученный из данного перестановкой сомножителей $C_1, C_2, \ldots, C_m$, тоже будет иметь в этом круге собственное значение.

Замечание. Из $A = CC_1$, $B = C_1 C$ следует $AC = CB$ и $BC_1 = C_1 A$. Наоборот, если оператор C имеет обратный, при котором оператор $C^{-1}A$ ограничен, то из $AC = CB$ получаем $B = C^{-1}AC = C_1 C$, где положено $C^{-1}A = C_1$, что в свою очередь означает $A = CC_1$. Поэтому, если оператор A имеет собственное значение, то и оператор B, определяемый из соотношения $AC = CB$ при любом ограниченном операторе C, имеющем обратный, при котором оператор $C^{-1}A$ ограничен, также имеет собственное значение.

Иначе это можно сформулировать таким образом: если оператор A имеет собственное значение в своем круге Фредгольма, то оператор $B = C^{-1}AC$, где C — любой ограниченный оператор, имеющий обратный, при котором $C^{-1}A$ ограничен, также имеет в круге Фредгольма оператора A собственное значение.

Теорема 2. *Если оператор $A = CC_1$, где C и C_1 — ограниченные линейные операторы, имеет полную систему собственных и присоединенных элементов, принадлежащих собственным значениям из круга Фредгольма оператора A, то и оператор $B = C_1 C$ имеет полную систему собственных и присоединенных элементов, принадлежащих собственным значениям из этого круга.*

Доказательство. По условию, для любого элемента f из H найдется такое число $\varepsilon_f > 1/r_A$, что будет

$$\| A^{*n} f\| = \| (CC_1)^{*n} f\| = \| (C_1^* C^*)^n f\| \geqslant \varepsilon_f^n \| f\|. \qquad (2)$$

Заметим, что

$$\| A^{*n} f\| = \| (C_1^* C^*)^n f\| = \| C_1^* (C^* C_1^*)^{n-1} C^* f\| =$$
$$= \| C_1^* (B^*)^{n-1} C^* f\| \leqslant \| C_1^*\| \cdot \| B^{*n-1} C^* f\|,$$

откуда, приняв во внимание (2), заключаем, что

$$\| B^{*n-1} C^* f\| \geqslant \frac{1}{\| C_1^*\|} \varepsilon_f^n \| f\| \qquad (3)$$

для любого f из H.

Собственные элементы φ_k оператора B, принадлежащие собственному значению λ_k, удовлетворяют уравнению $\varphi_k = \lambda_k B\varphi_k$, а присоеди-

ненные в случае m-кратного полюса λ_k резольвенты оператора удовлетворяют уравнениям

$$\psi_{-m+1}^{(k)} = \lambda_k B \psi_{-m+1}^{(k)} + B\varphi_k,$$

$$\psi_{-p}^{(k)} = \lambda_k B \psi_{-p}^{(k)} + B\psi_{-p-1}^{(k)} \quad (p = 1, 2, \ldots, m-2).$$

Пусть нашелся такой элемент g из H, который ортогонален ко всем собственным и присоединенным элементам оператора B. Тогда

$$(\varphi_k, g) = \lambda_k (B\varphi_k, g) = \lambda_k (\varphi_k, B^* g) = 0,$$
$$(\psi_{-p}^{(k)}, g) = (\lambda_k B \psi_{-p}^{(k)} + B\psi_{-p-1}^{(k)}, g) = \lambda_k (\psi_{-p}^{(k)}, B^* g) = 0,$$

так что элемент $h = B^* g = C^* C_1^* g = C^* f$, где $f = C_1^* g$, ортогонален ко всем собственным и присоединенным элементам оператора B.

Но тогда ряд

$$B_\lambda^* C^* f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} (B)^n C^* f$$

не должен иметь особенностей в круге радиуса r_A и иметь радиус сходимости, не меньший r_A, что при неравенстве (3) невозможно, если только не будет $h = C^* f = 0$, откуда и $g = 0$.

Замечание. Принимая во внимание суждения, высказанные в замечании к теореме 1, можно сделать утверждение о том, что если оператор A имеет полную систему собственных и присоединенных элементов, то и всякий оператор вида $B = C^{-1}AC$, где C — ограниченный оператор, имеющий обратный, при котором оператор $C^{-1}A$ ограничен, тоже имеет полную систему собственных и присоединенных элементов.

Теорема 3. *Если $L = QQ_1$, где Q и Q_1 — неограниченные линейные операторы, имеющие единственный ограниченный обратный оператор, имеет в своем круге Фредгольма собственное значение, то и оператор $M = Q_1 Q$ имеет в том же круге хотя бы одно собственное значение.*

Заметим, что если Q и Q_1 имеют единственный ограниченный обратный оператор, то и L также имеет единственный ограниченный обратный оператор и $L^{-1} = (QQ)^{-1} = Q_1^{-1} Q^{-1}$.

Напомним также, что областью Фредгольма рассматриваемого неограниченного оператора L мы называем область Фредгольма обратного ему ограниченного оператора L^{-1}.

В справедливости теоремы убеждаемся следующими рассуждениями.

Если оператор L имеет собственное значение, то и оператор $L^{-1} = Q_1^{-1} Q^{-1}$ также имеет собственное значение. По теореме 1 оператор $M^{-1} = Q^{-1} Q_1^{-1}$ также будет иметь собственное значение, а значит, и обратный ему оператор $M = Q_1 Q$ будет иметь собственное значение.

Следствие. Если оператор $L = Q_1 Q_2 \ldots Q_m$, где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ — неограниченные линейные операторы, имеющие единственный ограниченный обратный оператор, имеет в своем круге Фредгольма собственное значение, то любой оператор, полученный из данного перестановкой сомножителей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, также будет иметь в этом круге собственное значение.

Здесь также можно высказать замечание, аналогичное сформулированному к теореме 1. Из $L = QQ_1$ и $M = Q_1 Q$ следует $LQ = QM$, $MQ_1 = Q_1 L$. И, наоборот, при наших условиях из $LQ = QM$ следует $L = QQ_1$, $M = Q_1 Q$, где положено $MQ^{-1} = Q_1$.

Если L — оператор краевой задачи, имеющей собственное значение, то мы можем, беря соответствующий оператор Q_1, указать такой оператор $M = Q_1 L Q_1^{-1}$ краевой задачи, при котором задача также имеет собственное значение.

Следствие из теорем 1 и 3 можно использовать для практического установления существования собственного значения. Если при какой-либо перестановке сомножителей получился оператор, о котором известно, что он имеет собственное значение (например, самосопряженный, нормальный), то и данный оператор имеет собственное значение.

Теорема 4. *Если оператор $L = QQ_1$, где Q и Q_1 — неограниченные линейные операторы, имеющие единственный ограниченный обратный оператор, имеет полную систему собственных и присоединенных элементов, принадлежащих собственным значениям в круге Фредгольма оператора L, то и оператор $M = Q_1 Q$ имеет полную систему собственных и присоединенных элементов, принадлежащих собственным значениям в этом круге.*

Потому что в этом случае оператор $L^{-1} = Q_1^{-1} Q^1$ имеет полную систему и, по теореме 2, оператор $M^{-1} = Q^{-1} Q_1^{-1}$, а вместе с ним и оператор $M = Q_1 Q$, имеет полную систему.

Поступило
15 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Т. Талдыкин, ДАН, **92**, № 6 (1953).