Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 6

МАТЕМАТИКА

Г. И. КАЦ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, В КОТОРЫХ МОЖНО ВВЕСТИ ПОЛНУЮ РАВНОМЕРНУЮ СТРУКТУРУ

(Представлено академиком П. С. Александровым 7 X 1954)

Как известно, в каждом вполне регулярном пространстве можно ввести, вообще говоря, бесконечно много равномерных структур, индуцирующих топологию, совпадающую с исходной. Если среди этих структур имеется хотя бы одна полная, то рассматриваемое топологическое пространство будем, краткости ради, называть P-пространством.

Изучению P-пространств посвящена статья ([1]). В настоящей заметке рассматриваются некоторые критерии, позволяющие установить принадлежность вполне регулярного пространства к классу P-пространств.

Легко видеть, что каждое P-пространство является полным равномерным пространством относительно универсальной равномерной структуры ([2, 3]). Таким образом, если G — произвольное вполне регулярное пространство и νG — его пополнение по универсальной структуре, то условие $G = \nu G$ является необходимым и достаточным для того, чтобы G было P-пространством. Это условие можно переформулировать следующим образом. Пусть $\rho(x, y)$ — непрерывная обобщенная метрика на G (т. е. $\rho(x, y)$ непрерывна на $G \times G$ и удовлетворяет всем аксиомам метрики, за исключением $\rho(x, y) = 0 \to x = y$) и G' — расширение G. Мы назовем обобщенную непрерывную метрику $\rho'(x, y)$ на G' продолжением $\rho(x, y)$, если $\rho'(x, y) = \rho(x, y)$ для $x, y \in G$. νG может быть охарактеризовано как P-пространство, являющееся расширением G, на которое продолжима любая непрерывная обобщенная метрика на G.

Поэтому *пространство G является P-пространством тогда и только тогда, если для любого расширения G есть непродолжимая на него обобщенная непрерывная метрика* ([1]).

Теорема 1. $\nu G \subseteq \beta G$ (βG — *максимальное бикомпактное расширение*)*.

Действительно, пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная функция на G. Рассмотрим обобщенную непрерывную метрику $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Она продолжима на νG. Отсюда легко заключить, что $f(x)$ непрерывно продолжима на νG. Так как $f(x)$ — произвольная непрерывная функция на G, то $\nu G \subseteq \beta G$.

Локально-конечное покрытие $\{\overline{U}_\alpha\}$ (см. ([4])) назовем допустимым (л. к. д.) покрытием, если существует покрытие $\{\Gamma_\alpha\}$ такое, что $\Gamma_\alpha \subset U_\alpha$, Γ_α функционально отделимо от $G - U_\alpha$, Γ_α замкнуто.

Теорема 2. *Для того чтобы вполне регулярное пространство G было P-пространством, необходимо и достаточно, чтобы для*

* Теорема 1 неявно содержится в результатах работы ([7]). Доказательство отлично от приведенного выше.

каждой точки $x^* \in \beta G - G$ *существовало л. к. д. покрытие* $\{U_\alpha\}$ *пространства* G, *каждая окрестность которого отделима некоторой окрестностью* $V_\alpha^*(x^*)$ *от точки* x^*: $V_\alpha^*(x^*) \cap U_\alpha = 0$.

Достаточность. Пусть $x^* \in \nu G - G$; $\{U_\alpha\}$ — л. к. д. покрытие пространства G и $\{V_\alpha^*(x^*)\}$ — система окрестностей точки x^* такая, что $V_\alpha^*(x^*) \cap U_\alpha = 0$. Через $f_\alpha(x)$ обозначим непрерывную на G функцию, отделяющую Γ_α от $G - U_\alpha$: $f_\alpha(z) = 1$, $z \in \Gamma_\alpha$; $f(z) = 0$, $z \in G - U_\alpha$. Согласно теореме 1 можно $f_\alpha(z)$ непрерывно продолжить на νG. В частности, $f_\alpha(x^*) = 0$, так как $V_\alpha^*(x^*) \cap G \subset G - U_\alpha$.

Функция $\rho(z, y) = \sum_\alpha |f_\alpha(z) - f_\alpha(y)|$ является непрерывной обобщенной метрикой на G (см. доказательство аналогичного утверждения в ([4])). Используя возможность продолжить $\rho(z, y)$ на νG, нетрудно доказать неравенство

$$\rho(x^*, y) \geqslant |f_\alpha(y) - f_\alpha(x^*)| = |f_\alpha(y)|, \quad y \in G.$$

Так как $\{\Gamma_\alpha\}$ — покрытие пространства G, найдется α, для которого $\Gamma_\alpha \ni y$, и, следовательно:

$$\rho(x^*, y) \geqslant 1 \quad \text{при } y \in G,$$

что противоречит непрерывности $\rho(x^*, y)$ на νG. Итак, $\nu G = G$, и G, таким образом, P-пространство.

Необходимость. Если условие теоремы не выполнено, то существует точка $x^* \in \beta G - G$ такая, что в каждом л. к. д. покрытии пространства G найдется окрестность U_α, в замыкание которой (в βG) входит x^*.

Пусть $\{U_\alpha\}$ — какое-нибудь л. к. д. покрытие G. Построим для каждого U_α окрестность U'_α такую, что $U_\alpha \supset U'_\alpha \supset \Gamma_\alpha$; $G - U_\alpha$ и U'_α, $G - U'_\alpha$ и Γ_α функционально отделимы, $\{U'_\alpha\}$ — л. к. д. покрытие пространства G, поэтому найдется окрестность U'_α такая, что $[U'_\alpha]_{\beta G} \ni x^*$. Так как U'_α и $G - U_\alpha$ функционально отделимы, нетрудно показать, что $U_\alpha \supset \omega^*(x^*) \cap G$, где $\omega^*(x^*)$ — некоторая окрестность точки x^*.

Покажем, что любая непрерывная обобщенная метрика $\rho(z, y)$ на G продолжима на $x^* \cup G$. Этим будет доказано, что $x^* \in \nu G - G$, т. е., что G не является P-пространством.

Рассмотрим классы эквивалентных точек $\hat{x}$ пространства G. Точка $y \in G$ принадлежит классу $\hat{x}$, если $\rho(x, y) = 0$. Равенство $\rho(x, y) = \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y})$ определяет метрику на совокупности классов G. $x \to \hat{x}$ является непрерывным отображением пространства G на метрическое пространство $\hat{G}$. Рассмотрим покрытие $\{\hat{S}_{1/n}(\hat{x})\}$ пространства $\hat{G}$ сферами $\hat{S}_{1/n}(\hat{x})$ фиксированного диаметра $1/n$. Благодаря паракомпактности метрического пространства (см., например, ([4])) в покрытие $\{\hat{S}_{1/n}(\hat{x})\}$ можно вписать л. к. д. покрытие $\{\hat{D}^\mu_{1/n}\}$. Прообразы $D^\mu_{1/n}$ открытых множеств $\hat{D}^\mu_{1/n}$ образуют л. к. д. покрытие пространства G. Согласно доказанному выше можно найти $D^\mu_{1/n}$ и $\omega^*_n(x^*)$ такие, что

$$D^\mu_{1/n} \supset \omega^*_n(x^*) \cap G.$$

По построению

$$\operatorname{diam}(\omega^*_n(x^*) \cap G) \leqslant \operatorname{diam}(D^\mu_{1/n}) \leqslant \frac{1}{n} \left(\operatorname{diam} A = \sup_{yz \in A} \rho(y, z)\right). \qquad (1)$$

Продолжим теперь $\rho(y, z)$ на $x^* \cup G$, полагая

$$\rho(x^*, x^*) = 0; \quad \rho(x^*, y) = \rho(y, x^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(z_n, y); \quad y \in G, z_n \in \omega_n(x^*) \cap G.$$

При помощи неравенства (1) можно показать, что так определенная функция $\rho(y, z)$ является непрерывной обобщенной метрикой на $x^* \cup G \subset \beta G$. Теорема 2 доказана.

Замечание. Если пространство нормально, то каждое локально-конечное покрытие является л. к. д. покрытием ([4]).

Пользуясь различными конструкциями βG, не представляет труда переформулировать теорему 2 без явного употребления максимального бикомпактного расширения. Например, для нормальных пространств имеем:

Теорема 2′. *Для того чтобы нормальное пространство G было P-пространством, необходимо и достаточно, чтобы каждая максимальная центрированная система замкнутых множеств $\{F_\mu\}$ удовлетворяющая условию (*), имела не пустое пересечение.*

(*) *Любое локально-конечное покрытие пространства G содержит окрестность, покрывающую какое-нибудь множество F_μ.*

Из теоремы 2′ можно легко получить теорему 3, доказанную иным путем Давидсон ([5]).

Теорема 3. *Паракомпактное пространство является P-пространством.*

Если бы паракомпактное пространство G не было P-пространством, можно было бы, согласно теореме 2′, найти максимальную центрированную систему замкнутых множеств $\{F_\mu\}$ с пустым пересечением, удовлетворяющую условию (*). Рассмотрим локально-конечное покрытие $\{U_\alpha\}$, вписанное в покрытие $\{G - F_\mu\}$. В силу (*) можно найти U_α, содержащее некоторое F_μ. Кроме того, пусть $U_\alpha \subset G - F_\nu$. Отсюда следует, что F_μ и F_ν имеют пустое пересечение, что невозможно. При помощи теоремы 2 можно доказать следующий достаточный признак:

Если G — подпространство P-пространства Γ и для любой точки $x^* \in \Gamma - G$ существует л. к. д. покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства G и система окрестностей $\{V_\alpha^*(x^*)\}$ такие, что $U_\alpha \cap V_\alpha^*(x^*) = 0$, то G является P-пространством.

В частности, достаточно, чтобы для каждой точки из $\Gamma - G$ существовала счетная система окрестностей, отделяющая ее от точек G.

Последнее утверждение принадлежит Дьедоне ([1]).

Из теоремы 2 следует также обобщение теоремы Дьедоне ([6]); *пространство, имеющее более жесткую топологию, чем какое-нибудь метризуемое пространство, является P-пространством.*

Теорема 4. *Пусть G' — вполне регулярное пространство, полученное из P-пространства G, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, введением в G более жесткой топологии, чем исходная. G' является P-пространством**.

Нетрудно показать, что можно установить непрерывное отображение $x^* = \varphi(x^{*'})$ пространства $\beta G'$ на βG, взаимно-однозначно отображающее G' на G (т. е. при $x' \in G'$, $x \in G$ отображение $x = \varphi(x')$ взаимно-однозначно). Через $\lambda G'$ обозначим прообраз G в $\beta G'$. Пусть $x^{*'} \in \beta G' - \lambda G'$, тогда $\varphi(x^{*'}) \in \beta G - G$. Согласно теореме 2 можно найти л. к. д.

---

* Теорема 4 может быть усилена, если вместо первой аксиомы счетности предположить, что G — P-пространство и для любой точки $x \in G$ можно найти л. к. д. покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $G - x$ и систему окрестностей $\{V_\alpha(x)\}$ такие, что $U_\alpha \cap V_\alpha(x) = 0$.

покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства G и систему окрестностей $\{V^*_\alpha(\varphi(x^{*\prime}))\}$ такие, что $U_\alpha \cap V^*_\alpha(\varphi(x^{*\prime})) = 0$. $\{\varphi^{-1}U_\alpha\}$ — л. к. д. покрытие $\lambda G'$ и $\varphi^{-1}U_\alpha \cap V'^*_\alpha(x^{*\prime}) = 0$, где $V'^*_\alpha(x^{*\prime})$ — прообраз $V^*_\alpha(\varphi(x^{*\prime}))$. На основании теоремы 2 заключаем, что $\lambda G'$ является P-пространством.

Пусть $z^{*\prime} \in \lambda G' - G'$, $\varphi(z^{*\prime}) = x \in G$ и $x' \in G'$ — такая точка, что $\varphi(x') = x$. Через $V_n(x)$ обозначим окрестности счетного базиса точки x. $V'_n(z^{*\prime})$ — прообраз $V_n(x)$ при $n \neq 0$; $V'_0(z^{*\prime})$ — окрестность, выбранная так, чтобы $x' \overline{\in} V'_0(z^{*\prime})$. Если $y' \in G'$ и $y' \neq x'$, то $\varphi(y') = y \neq x$ в силу взаимной однозначности отображения φ на G', G. Пусть y' — произвольная точка G', отличная от x'. Выберем окрестность $V_n(x)$ так, чтобы она не содержала точки y, тогда $V'_n(z^{*\prime})$ не содержит точки y'. Кроме того окрестность $V'_0(z^{*\prime})$ не содержит точки x'.

Итак, любая точка $\lambda G' - G'$ может быть отделена счетной системой окрестностей от точек G', и, следовательно, G' является P-пространством.

Для сепарабельных пространств имеет место:

Теорема 5. *Для того чтобы сепарабельное пространство G было P-пространством, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка из $\beta G - G$ могла быть отделена от точек G счетной системой окрестностей.*

Достаточность утверждения теоремы 5 следует непосредственно из сформулированного выше достаточного условия. Необходимость следует из теоремы 2 и того, что локально-конечное покрытие сепарабельного пространства может быть не более, чем счетным.

Поступило
27 VIII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Dieudonné, Ann. sci. de l'école norm. sup., **56**, No. 4, 277 (1939). [2] A. Weil, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Paris, 1937. [3] Н. С. Рамм, А. С. Шварц, Матем. сборн., **33** (75), № 1, 157 (1953). [4] Ю. М. Смирнов, Усп. матем. наук, **6**, № 6 (46), 100 (1951). [5] A. Dickinson, Am. J. Math., **75**, No. 2, 224 (1953). [6] J. Dieudonné, C. R., **209**, 666 (1939). [7] P. Samuel, Trans. Am. Math. Soc., **64**, № 1, 100 (1948).