Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. Л. ГУРЕВИЧ

НОВЫЕ ТИПЫ ПРОСТРАНСТВ ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 IX 1954)

В настоящей работе методы, построенные в статье И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (1), обобщаются в направлении, которое позволяет применить их также к решению задачи Коши для систем конечноразностных уравнений. Автору известны в этой области только результаты Л. И. Камынина (2), относящиеся к частным типам конечноразностных уравнений. Будем пользоваться обозначениями и терминологией из статьи (1).

1. Пусть $M(x)$ и $\Omega(\tau)$ — две функции, взаимно дополнительные по Юнгу (3), т. е. определенные для $x \geqslant 0$, $\tau \geqslant 0$ равенствами

$$M(x) = \int_0^x \mu(\xi)\, d\xi, \quad \Omega(\tau) = \int_0^\tau \omega(\theta)\, d\theta,$$

где $\mu(\xi)$ и $\omega(\theta)$ — непрерывные, монотонные, взаимно обратные функции, такие, что $\mu(0) = \omega(0) = 0$, $\mu(\infty) = \omega(\infty) = \infty$.

Введем следующие пространства основных функций:

а) пространство K_M, состоящее из основных функций $\varphi(x)$, $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, удовлетворяющих неравенствам

$$|D^p \varphi(x)| \leqslant C_1 e^{-M(C|x|)}$$

(C_1, C зависят от p);

б) пространство Z^Ω, состоящее из основных функций $\psi(s)$, $s = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$, аналитически продолжаемых на всю комплексную область $s = \sigma + i\tau$ и удовлетворяющих неравенствам

$$\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} |P(s)|^2 |\psi(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma \leqslant A_1 e^{\Omega(A|\tau|)}$$

для любого полинома $P(s)$ (ср. в (1) определение пространств K_p и Z^p).

Теорема 1. *Пространства K_M и Z^Ω двойственны друг другу (в смысле, указанном в* (1)).

В дальнейшем будут специально использованы взаимно дополнительные функции $M_0(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ и $\Omega_0(\tau) = e^\tau - \tau - 1$.

2. Через $T^{(m)}(K_M)$ и $T^{(m)}(Z^\Omega)$ будем обозначать соответствующие пространства обобщенных вектор-функций с m составляющими (1).

Рассмотрим систему m уравнений

$$\frac{dv(s,\ t)}{dt} = F(s,\ t)\, v(s,\ t), \tag{1}$$

где матрица-функция $F(s,\ t)$ — непрерывная по t и целая аналитическая по s, причем такая, что при $0 \leqslant t_0 \leqslant t$

$$\left|\exp\int_{t_0}^{t} F(s,\ t)\,dt\right| A_1 e^{\Omega(A|\tau|)}(1+|s|^q) \tag{2}$$

(интеграл понимается как мультипликативный; ср. в [1] определение регулярной системы). Требуется решить эту систему при начальном условии

$$v(s,\ 0) = v_0(s). \tag{3}$$

Теорема 2. *Система* (1) *имеет решение в классе обобщенных вектор-функций* $T(Z^{\Omega})$, *и притом единственное, если к этому классу принадлежит начальная вектор-функция* $v_0(s)$.

Рассмотрим, в частности, матрицу-функцию $F(s,\ t)$ с элементами вида

$$F_{\mu\nu}(s,\ t) = \sum_{k=1}^{K_{\mu\nu}} a_{k\mu\nu}(t)\, e^{ih_{k\mu\nu}s_{k\mu\nu}} \quad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{4}$$

где $s_{k\mu\nu}$ — одно из переменных $s_1,\ s_0,\ \ldots,\ s_N$; $a_{k\mu\nu}$ — непрерывные комплекснозначные функции от t; $h_{k\mu\nu}$ — вещественные числа. Тогда неравенство (2) выполняется для $\Omega = \Omega_0$ и $q = 0$ и в соответствующем пространстве $T^{(m)}(Z^{\Omega_0})$ будет справедливо и утверждение теоремы 2.

3. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = F\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x},\ t\right)u(x,\ t), \tag{5}$$

где матрица F — непрерывная функция от t и целая аналитическая функция от $\partial/\partial x$ (смысл оператора F будет далее уточнен); требуется решить эту систему при начальном условии

$$u(x,\ 0) = u_0(x). \tag{6}$$

Задача ставится в некотором классе обобщенных вектор-функций $T^{(m)}(K_M)$. Оператор $F\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x},\ t\right)$ понимается как сумма соответствующего бесконечного ряда, который для искомой обобщенной вектор-функции $u(x,\ t)$ должен сходиться в смысле сходимости, установленной для пространства $T^{(m)}(K_M)$.

Переходом к преобразованиям Фурье эта задача сводится к задаче (1)—(3). Таким образом, задача (5)—(6) будет иметь решение, и притом единственное, в классе $T^{(m)}(K_M)$, если функция $F(s,\ t)$ удовлетворяет неравенству (2).

В частности, в качестве оператора $F\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x},\ t\right)$ рассмотрим обобщенный разностный оператор, элементы матрицы которого имеют вид операторов

$$\sum_{k=1}^{K_{\mu\nu}} a_{k\mu\nu}(t)\, e^{\frac{1}{2\pi}h_{k\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_{k\mu\nu}}}u(x,\ t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{K_{\mu\nu}} a_{k\mu\nu}(t)\,u\left(x_{k\mu\nu} + \frac{h_{k\mu\nu}}{2\pi},\ t\right), \tag{7}$$

где $x_{k\mu\nu}$ — одно из переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$.

В этом случае матрица-функция $F(s, t)$ имеет вид (4) и удовлетворяет неравенству (2) при $\Omega = \Omega_0$; отсюда получается следующая теорема:

Теорема 3. *Задача Коши* (5)—(6), *где* F *— обобщенный разностный оператор* (7), *имеет решение, и притом единственное, в классе обобщенных вектор-функций* $T^{(m)}(K^{M_0})$, *если начальная вектор-функция* $u_0(x)$ *принадлежит к этому классу.*

В частности, мы получаем теорему единственности решения системы (5)—(6) в классе вектор-функций $u(x, t)$, удовлетворяющих при каждом $t \geqslant 0$ неравенству

$$|u(x, t)| \leqslant C_1 e^{\varepsilon |x| \ln |x|} \tag{8}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

4. Используя методы А. Г. Костюченко и Г. Е. Шилова ([4]), можно получить и теорему о существовании решения системы (5)—(6) в виде обычной вектор-функции при условии достаточной гладкости начальной функции $u_0(x)$:

Теорема 4. *Если вектор-функция* $u_0(x)$ *имеет непрерывные производные до порядка* $N+2$ (N *— число независимых переменных,* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$), *каждая из которых удовлетворяет неравенству* (8), *то решение системы* (5)—(6) *— обычная вектор-функция.*

Автор приносит благодарность Г. Е. Шилову, привлекшему внимание автора к рассмотренным здесь вопросам.

Поступило
18 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, **8**, в. 6/58 (1953). [2] Л. И. Камынин, Изв. АН СССР, сер. матем., **17**, № 2 (1953). [3] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.— Л., 1939, § 4.11. [4] А. Г. Костюченко, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, **9**, в. 1/59 (1954).