Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 6

МАТЕМАТИКА

Ф. А. БЕРЕЗИН и И. И. ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО

ОДНОРОДНЫЕ РАСШИРЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 X 1954)

Из теории функций одного комплексного переменного хорошо известна так называемая сфера Римана, являющаяся расширением комплексной плоскости. Сфера Римана является также однородным пространством, т. е. группа ее аналитических гомеоморфизмов транзитивна.

В настоящей заметке рассматриваются многообразия, являющиеся многомерными обобщениями сферы Римана. (Заметим, что для случая двух переменных имеется по крайней мере два негомеоморфных естественных обобщения сферы Римана: двумерное комплексное проективное пространство и прямое произведение двух сфер Римана; см., например, (1).)

Определение. Компактное комплексное многообразие M называется расширением комплексного аффинного пространства C, если существует аналитическое отображение f: $C \to M$ со следующими свойствами: 1) соответствие между точками C и $f(C)$ взаимно-однозначно; 2) $f(C)$ всюду плотно в M.

Комплексное многообразие M называется однородным, если группа его аналитических гомеоморфизмов транзитивна.

В настоящей заметке доказывается, что каждое из следующих четырех свойств выделяет один и тот же класс многообразий, называемых далее D-многообразиями:

I. D-многообразия являются однородными расширениями аффинного комплексного пространства.

II. D-многообразия являются однородными односвязными алгебраическими многообразиями.

III. D-многообразия являются однородными комплексными многообразиями, поле мероморфных функций на которых изоморфно полю рациональных функций от того же числа переменных, что и комплексная размерность D-многообразия.

IV. Все D-многообразия могут быть описаны как пространства классов смежности некоторой комплексной полупростой группы G по ее комплексной подгруппе, содержащей максимальную разрешимую подгруппу группы G *.

п° 1. Примем за определение D-многообразий свойство I и выведем из него свойства II и III.

Покажем, во-первых, что D-многообразия односвязны. Обозначим через C подмножество D-многообразия, аналитически эквивалентные

* Многообразия классов смежности классических групп по подгруппам, содержащим максимальную разрешимую, впервые рассматривались в работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка (см., например, (2)). Весьма замечательно, что при их помощи оказывается возможным построение всех неприводимых унитарных представлений классических групп (10).

аффиному комплексному пространству, а через F дополнение к C. Поскольку C эквивалентно комплексному аффинному пространству, на C существует n аналитических функций $z_1, \ldots, z_n$, которые можно принять за координаты на C. Покажем, что в каждой точке F хотя бы одна из функций z_k перестает быть регулярной. Пусть u_0 — некоторая точка F; допустим, что все z_k регулярны в u_0. Тогда существует такая точка $v_0 \in C$, что $z_k(v_0) = z_k(u_0)$.

Рассмотрим систему уравнений

$$z_k(v) = z_k(u), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{1}$$

где v находится в достаточно малой окрестности v_0, а u, соответственно, в окрестности u_0. Очевидно, что (1) определяет аналитическое взаимно-однозначное соответствие между достаточно малыми окрестностями точек v_0 и u_0. Поскольку C всюду плотно на M, в достаточно малой окрестности u_0 находятся точки C. Значит, существует система значений $a_1, \ldots, a_n$, которую функции $z_1, \ldots, z_n$ принимают в двух разных точках C, что является противоречием. Таким образом, F является множеством особых точек функций z_k, поэтому вещественная размерность F на 2 единицы меньше вещественной размерности D-многообразия. Следовательно, всякий замкнутый путь на D-многообразии гомотопен замкнутому пути на C, т. е. гомотопен 0. Таким образом, односвязность D-многообразий доказана.

Докажем теперь, что D-многообразия являются алгебраическими. Для этого воспользуемся принадлежащим Chow ([3]) результатом, согласно которому компактное комплексное многообразие является алгебраическим, если на нем существует столько аналитически независимых мероморфных функций, какова его (комплексная) размерность. Нужный запас мероморфных функций дают введенные ранее координатные функции $z_1, \ldots, z_n$.

Доказательство их мероморфности состоит в следующем.

Особенности функции $1/z_k$ заполняют многообразие ζ_k комплексной размерности $n-1$. Многообразие ζ_k связно и включает в себя точки гиперплоскости $z_k = 0$*. Следовательно, оно находится в общем положении с F. Так как в C нет точек ζ_k, не лежащих на плоскости $z_k = 0$, а на ней $1/z_k$ имеет лишь точки мероморфности, существенно особые точки $1/z_k$ лежат в $F \cap \zeta_k$, а это пересечение имеет размерность меньше $n-1$. Так как, с другой стороны, существенно особые точки аналитической функции заполняют многообразие комплексной размерности $n-1$, то функция $1/z_k$, а вместе с ней и функция z_k мероморфны. Таким образом, свойство 2 доказано.

Осгуд ([1]) доказал, что поле мероморфных функций на расширенном комплексном пространстве является полем рациональных функций от того же числа переменных, какова комплексная размерность пространства. Таким образом, из свойства I следует свойство III.

Отметим, что в рассуждениях этого n° нигде не использована однородность D-многообразий.

n°2. Из свойств II и III следует свойство I.

В работе Wang'a ([5]) рассмотрены однородные односвязные компактные комплексные многообразия. Часть их составляют некелеровы и, следовательно, неалгебраические многообразия, а остальные, как мы ниже покажем, являются расширениями комплексного пространства.

---

* Если бы ζ_k имело компоненту K, не содержащую плоскости $z_k = 0$, то очевидно, что K вся лежала бы в F. Каждую точку K можно тогда окружить окрестностью U такой, что функция $1/z_k$ ограничена в $U \setminus U \cap F$. Следовательно, по теореме об устранимой особенности ([4], стр. 239), $1/z_k$ не имеет особенностей на K.

Таким образом, из свойства II немедленно вытекает свойство I.

Из свойства III вытекает свойство II. Действительно, благодаря наличию мероморфных функций многообразие алгебрайчно ([3]). Односвязность же его следует из того, что оно бирационально эквивалентно комплексному проективному пространству (поскольку поле мероморфных функций на нем есть поле рациональных функций), а фундаментальная группа является бирациональным инвариантом ([6]).

В случае одного переменного сфера Римана является единственным расширением комплексной плоскости, и требование однородности излишне. Авторам неизвестно, является ли это требование (при формулировке свойства I) необходимым в случае многих переменных.

Что касается свойств II и III, то там требование однородности не может быть отброшено, как показывает пример поверхности *

$$z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0. \tag{2}$$

Как показано в ([7]), поле мероморфных функций на ней изоморфно полю рациональных функций (согласно n° 2 отсюда вытекает односвязность этой поверхности). Можно, однако, проверить, что эта поверхность не является расширением комплексного пространства и, следовательно, не может быть однородным многообразием.

В формулировке свойства II не может быть также отброшено требование односвязности, как показывает пример тора.

n°3. Покажем, что свойство IV эквивалентно предыдущим.

В работе Wang'a ([5]) найдены все компактные однородные односвязные комплексные многообразия, причем показано, что на них транзитивно действует полупростая группа Ли как группа аналитических гомеоморфизмов. Из его работы вытекает также, что алгебраическими среди них могут быть лишь те, стационарная подгруппа которых содержит максимальную разрешимую подгруппу указанной полупростой группы. Мы покажем сейчас, что все эти многообразия являются расширениями комплексного пространства **. (То обстоятельство, что все расширения исчерпываются ими, следует из свойства II.)

Обозначим через G комплексную полупростую группу; K — ее максимальную разрешимую подгруппу; $\tilde{K}$ — подгруппу, включающую K ($G \supseteq \tilde{K} \supseteq K$), и Z — максимальную нильпотентную подгруппу G. Из работ ([8, 9]) следует, что все максимальные разрешимые подгруппы полупростой группы Ли, так же как и все ее максимальные нильпотентные подгруппы, сопряжены между собой. Поэтому мы можем считать, что алгебра Ли, соответствующая K, порождена картановской подалгеброй G и положительными корневыми векторами, а алгебра, соответствующая Z, порождена отрицательными корневыми векторами (первая подалгебра — максимальная разрешимая, вторая — максимальная нильпотентная ([8])).

Докажем следующую лемму:

Лемма. *Каждый элемент G, за исключением элементов, составляющих многообразие меньшей размерности, представляется, и притом единственным образом, в виде*

$$g = kz, \quad k \in K, \quad z \in Z.$$

Доказательство. Рассмотрим линейное представление группы G, в котором группа Z переходит в некоторую подгруппу группы Z' (Z' — группа нижних треугольных матриц с единицами на главной

* Этот пример авторам сообщен И. Р. Шафаревичем.

** Следовательно (см. n°1), являются алгебраическими. Результат этот в ([5]) отсутствует.

диагонали), а K переходит в некоторую подгруппу группы K' верхних треугольных матриц. Из (2) следует, что каждый элемент группы G, за исключением составляющих многообразие на 2 единицы меньшей вещественной размерности *, единственным образом представим в виде $g = k'z'$, $k' \in K'$, $z' \in Z'$. Следовательно, множество M' элементов G, представимых в виде $g = k'z'$, связно. Легко проверить, что множество M элементов G, представимых в виде $g = kz$ ($k \in K$, $z \in Z$), открыто и замкнуто в M' и, следовательно, совпадает с M'. Лемма доказана.

Из леммы следует, что образ многообразия M в G/K при естественном отображении f: $G \to G/K$ всюду плотен в G/K. Так как пространство группы Z аналитически эквивалентно комплексному аффинному пространству, $f(M) = f(Z)$ и f — аналитическое отображение; G/K есть расширенное комплексное пространство.

Рассмотрим общий случай. Пусть $\tilde{K} \supset K$. Известно, что G/K есть косое произведение со слоем $\tilde{K}/K$ и базой $G/\tilde{K}$. Естественное отображение φ: $G/K \to G/\tilde{K}$ переводит всюду плотное на $G/\tilde{K}$ множество $f(Z)$ во всюду плотное на $G/\tilde{K}$ множество $\varphi f(Z)$.

Легко видеть, что $\varphi f(z) = \varphi f(z_1)$ тогда и только тогда, когда $z = kz_1$, $k \in \tilde{K} \cap Z$. Таким образом, φf есть взаимно-однозначное аналитическое отображение многообразия $Z/Z \cap \tilde{K}$ в $G/\tilde{K}$. Так как $Z/Z \cap \tilde{K}$ эквивалентно аффинному комплексному пространству, то $G/\tilde{K}$ есть расширение комплексного пространства.

Поступило
26 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. F. Osgood, Lehrbuch d. Functionentheorie, **2**, 1929. [2] И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Тр. Матем. инст. им. Стеклова, **36** (1950). [3] W. L. Chow, Am. J. Math., **71**, 893 (1949). [4] С. Бохнер, Функции многих комплексных переменных, ИЛ, 1951. [5] Hsien Chung Wang, Am. J. Math., **76**, № 1 (1954). [6] W. L. Chow, ibid., **74**, 726 (1952). [7] E. Picard, G. Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, **1**, **2**, 1897—1906. [8] В. В. Морозов, ДАН, **36**, № 3, 91 (1942). [9] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., **9**, 329 (1945). [10] М. А. Наймарк, ДАН, **84**, № 5, 883 (1952).

* Множество тех элементов полной линейной группы G', которые не представляются в виде $k'z'$, выделяется уравнением $f(g) = 0$, где f — аналитическая функция от элементов группы G'. На группе G эта функция не равна тождественно нулю, поскольку единица группы представима в нужном виде.