Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 6

МАТЕМАТИКА

Академик А. А. АНДРОНОВ и Е. А. ЛЕОНТОВИЧ

РОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ИЗ НЕГРУБОГО ФОКУСА ИЛИ ЦЕНТРА И ОТ НЕГРУБОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА*

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y) \tag{A}$$

и наряду с системой (A) „измененная система"

$$dx/dt = \bar{P}(x, y), \quad dy/dt = \bar{Q}(x, y), \tag{$\bar{A}$}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\bar{P}(x, y)$, $\bar{Q}(x, y)$ — однозначные и непрерывные функции в некоторой области g плоскости, либо имеющие непрерывные частные производные до порядка N (в этом случае мы будем говорить, что система (A) или ($\bar{A}$) принадлежит классу N), либо аналитические (в этом случае мы будем говорить, что система (A) или ($\bar{A}$) принадлежит аналитическому классу). Будем говорить, что система ($\bar{A}$) δ-близка до ранга $r \geqslant 1$ к системе (A) в области g (или в некоторой замкнутой области $\bar{g}^* < g$), если системы (A) и ($\bar{A}$) принадлежат классу r и во всех точках g (или $\bar{g}^*$) выполняются неравенства:

$$|\bar{P}(x, y) - P(x, y)| < \delta, \quad |\bar{Q}(x, y) - Q(x, y)| < \delta,$$

$$|\bar{P}^{(i+k)}_{x^i y^k}(x, y) - P^{(i+k)}_{x^i y^k}(x, y)| < \delta, \quad |\bar{Q}^{(i+k)}_{x^i y^k}(x, y) - Q^{(i+k)}_{x^i y^k}(x, y)| < \delta$$

(в дальнейшем мы будем опускать слова „в области g" или „в g^*"). Будем в дальнейшем предполагать, что рассматриваемые измененные системы ($\bar{A}$) принадлежат к тому же классу, что и данная (исходная) система (A). Систему (A) можно рассматривать как одну из систем ($\bar{A}$). В дальнейшем все величины в случае системы (A) будем обозначать буквами без черты сверху.

Как известно [4], при переходе от системы (A) к измененной системе ($\bar{A}$) из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла могут рождаться предельные циклы. В настоящей заметке устанавливаются основные общие предложения, касающиеся такого рождения предельных циклов**.

§ 1. Предположим, что точка $O(x_0, y_0)$ является состоянием равновесия системы (A), а также рассматриваемых систем ($\bar{A}$), и при этом таким, у которого корни характеристического уравнения — комплексные сопряженные (в частности, чисто мнимые). Вводя полярные коорди-

* Эта работа сделана в 1937 г., но до настоящего времени не была напечатана. Результаты этой работы используются в [1–3]. Понятие „кратности" негрубого фокуса и негрубого предельного цикла дано в [4], там же рассматривается простейший случай рождения предельного цикла из негрубого фокуса.

** Рассматривавшийся в работах [5,6] вопрос о рождении предельных циклов из негрубого фокуса или центра при предположении, что функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и $\bar{P}(x, y)$, $\bar{Q}(x, y)$ являются многочленами данной фиксированной степени, находится в другом круге идей и представляет трудности совсем другого порядка.

наты, обычным приемом сводим рассмотрение системы $(\bar{A})$, в частности, системы (A), к рассмотрению одного уравнения

$$d\rho/d\theta = \bar{R}(\rho, \theta), \qquad (R)$$

где при надлежащем выборе $\rho^0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ функция $\bar{R}(\rho, \theta)$ для всех систем $(\bar{A})$ класса N (аналитического класса), δ_0-близких до ранга $r \geqslant 1$ к системе (A), является функцией, непрерывной при всех θ и всех $\rho, |\rho| < \rho^0$, имеющей непрерывные частные производные по ρ до порядка r (голоморфной относительно ρ и θ), и при любом $\varepsilon > 0$ и надлежащим образом выбранном $\delta < \delta_0$, $\delta > 0$, для всех систем $(\bar{A})$ δ-близких до ранга r к системе (A) при всех θ и $|\rho| < \rho^0$ выполняются неравенства $|\partial^i \bar{R}(\rho, \theta)/\partial \rho^i - \partial^i \bar{R}(\rho, \theta)/\partial \rho^i| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Очевидно, $\bar{R}(\rho, \theta)$ — периодическая функция θ с периодом 2π и $\bar{R}(0, \theta) = 0$, т. е. $\rho = 0$ — решение уравнения $(\bar{R})$. Если $\rho = \bar{f}(\theta, \theta_0, \rho_0)$ есть решение уравнения $(\bar{R})$, то $\rho = \bar{f}(2\pi, 0, \rho_0)$ есть „функция последования“ на полупрямой $\theta_0 = 0$, а $\bar{\psi}(\rho_0) = \bar{f}(2\pi, 0, \rho_0) - \rho_0$ — функция, нули которой соответствуют замкнутым траекториям системы $(\bar{A})$. При любом $\varepsilon' > 0$ существует $\delta' > 0$ $(\delta' < \delta_0)$ такое, что для всякой рассматриваемой системы $(\bar{A})$ класса N (аналитического класса), δ'-близкой до ранга r к системе (A), функция $\bar{\psi}(\rho_0)$ определена при всех $\rho_0 < \rho^*$ $(\rho^* > 0$ надлежащим образом выбранная величина), при всех этих значениях ρ_0 имеет непрерывные производные до порядка r (голоморфна), и при этом выполняются неравенства

$$|\bar{\psi}(\rho_0) - \psi(\rho_0)| < \varepsilon', \quad |\bar{\psi}^{(i)}(\rho_0) - \psi^{(i)}(\rho_0)| < \varepsilon', \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Величины $\bar{\psi}^{(i)}(0)$ называются „фокусными величинами“, и их выражения через производные от функции $\bar{R}(\rho, \theta)$ (при $\rho = 0$) известны (7).

Лемма 1. *При любом* $r_0^* < \rho^*$, $r_0^* > 0$ *существует* $r_0^{**} > 0$, $r_0^{**} < r_0^*$ *и* $\delta^* > 0$ *такие, что какую бы систему* $(\bar{A})$, δ^**-близкую до ранга* r *к системе* (A), *мы ни взяли, в случае, если при некотором* $\rho_0' > 0$, $\rho_0' < r_0^{**}$ $\bar{\psi}(\rho_0') = 0$, *то непременно существует* $\bar{\rho}_0' > 0$, $\bar{\rho}_0' < r_0^*$ *такое, что* $\bar{\psi}(-\bar{\rho}_0') = 0$.

Мы рассмотрим следующие два случая: 1) состояние равновесия O системы (A) класса N (аналитического класса) есть негрубый фокус кратности k, т. е. $\psi^{(i)}(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 2k$, $\psi^{(2k+1)}(0) \neq 0$; 2) состояние равновесия системы (A) аналитического класса является центром, т. е. при *любом* i $\psi^{(i)}(0) = 0$. Предполагая, что система (A) в окрестности точки O имеет канонический вид, рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \bar{P}(x, y, \lambda_i) = P(x, y) + \lambda_0 x + \lambda_1 (x^2 + y^2) x + \ldots + \lambda_m (x^2 + y^2)^m x, \\ \frac{dy}{dt} &= \bar{Q}(x, y, \lambda_i) = Q(x, y) + \lambda_0 y + \lambda_1 (x^2 + y^2) y + \ldots + \lambda_m (x^2 + y^2)^m y. \end{aligned} \qquad (\bar{A}_\lambda)$$

Лемма 2. *Если система* (A) *такова, что для нее при всех* $i \leqslant 2m + 1$ $\psi^{(i)}(0) = 0$ $(2m + 1 \leqslant N$ *в случае, когда система* (A) *принадлежит классу* N), *то величины* $\bar{\psi}^{(i)}(0)$ *для системы* $(\bar{A}_\lambda)$ *имеют вид*: $\bar{\psi}'(0) = e^{\lambda_0 a_0} - 1$, $\bar{\psi}^{(2i)}(0) = \varphi_{2i}(\lambda_0, \ldots, \lambda_i)$, $\bar{\psi}^{(2i+1)}(0) = \lambda_i a_i + \varphi_{2i-1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i)$, где a_i — *постоянная*, φ_k — *непрерывные функции* λ_i, *и при этом* $a \neq 0$, $\varphi_{2i}(0, \ldots, 0) = 0$, $\varphi_{2i-1}(0, \ldots, 0, \lambda_i) = 0$.

Теорема 1. *Если состояние равновесия* O *системы* (A) *класса* $N = 2k + 1$ (*аналитического класса*) *есть негрубый фокус кратно-*

сти k, то: а) *существуют* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\delta_0 > 0$ *такие, что какую бы систему* $(\bar{A})$ *класса* N (*аналитического класса*), δ_0-*близкую до ранга* N *к системе* (A), *мы ни взяли, в* ε_0-*окрестности* O *может лежать не более* k *замкнутых траекторий* (*предельных циклов*) *системы* $(\bar{A})$; б) *при любых* $\varepsilon < \varepsilon_0$ $(\varepsilon > 0)$ *и* $\delta < \delta_0$ $(\delta_0 > 0)$ *можно указать систему* $(\bar{A})$ *класса* N (*аналитического класса*), δ-*близкую до ранга* N *к системе* (A), *у которой в* ε-*окрестности точки* O *лежат* k *замкнутых траекторий* (*предельных циклов*).

При доказательстве пункта а) используется лемма 1, при доказательстве пункта б) рассматривается система $(\bar{A}_\lambda)$ и используется лемма 2.

Теорема 2. *Если состояние равновесия* O *системы* (A) *аналитического класса является центром, то*: а) *существуют* $\varepsilon_0 > 0$ и $\lambda^0 > 0$ *такие, что при всех* $|\lambda_i| < \lambda^0$ *у системы* $(\bar{A}_\lambda)$ *в* ε_0-*окрестности* O *лежит не более* $m-1$ *замкнутых траекторий*; б) *при любых* $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon > 0$ *и* $\lambda^* < \lambda^0$, $\lambda^* > 0$, *можно указать такие значения* λ_i^*, $|\lambda_i^*| < \lambda^*$, *при которых у системы* $(\bar{A}_\lambda)$ *в* ε_0-*окрестности начала* O *лежат* $m-1$ *предельных циклов*.

§ 2. Предположим, что система (A) класса N (аналитического класса) имеет замкнутую траекторию L_0, параметрическое уравнение которой $x = \varphi_0(t)$, $y = \psi_0(t)$, где $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$ — периодические функции t с периодом τ. Вводим в окрестности L_0 криволинейные координаты, полагая $x = \varphi_1(s, n) = \varphi_0(s) + n\dot{\psi}_0(s)$, $y = \psi_1(s, n) = \psi_0(s) - n\dot{\varphi}(s)$.

Переходя в системе (A) и в измененных системах $(\bar{A})$, достаточно близких до ранга r к системе (A), к переменным s и n, сводим рассмотрение системы уравнений к рассмотрению одного уравнения вида

$$\frac{dn}{ds} = \frac{\bar{P}[\varphi_1(s,n), \psi_1(s,n)]\,\psi_{1s}'(s,n) - \bar{Q}[\varphi_1(s,n), \psi_1(s,n)]\,\varphi_{1s}'}{\bar{P}[\varphi_1(s,n), \psi_1(s,n)]\,\dot{\varphi}_0(s) - \bar{Q}[\varphi_1(s,n), \psi_1(s,n)]\,\dot{\psi}_0(s)} = \bar{G}(s,n), \quad (\bar{G})$$

аналогичному уравнению $(\bar{R})$ предыдущего параграфа с той только разницей, что $n = 0$ является решением уравнения (G), соответствующего системе (A), но, вообще говоря, уже не является решением уравнения $(\bar{G})$. Если $n = \bar{f}(s, s_0, n_0)$ — решение уравнения (G), то $n = f(\tau, 0, n_0)$ есть функция последования на отрезке нормали l_0 к траектории L_0, проведенной в точке L_0, соответствующей $t = 0$. Как и выше, рассмотрим функцию $\bar{\psi}(n_0) = \bar{f}(s, s_0, n_0) - n_0$, нули которой соответствуют замкнутым траекториям системы $(\bar{A})$. В случае системы (A) производные $\psi^{(i)}(0)$ находятся аналогично тому, как находятся фокусные величины:

$$\psi'(0) = \exp\int_0^\tau [P_x'(\varphi_0, \psi_0) + Q_y'(\varphi_0, \psi_0)]\,dt - 1, \quad \psi^{(i)}(0) = f_s'(\tau,0,0)\int_0^\tau \Phi \quad (i = 1)$$

Несложные вычисления показывают, что, воспользовавшись символической записью, мы будем иметь:

$$\Phi_k(s) = \varkappa_k \left[\frac{f_s'(s,0,0)}{\dot{\varphi}_0^2(s) + \dot{\psi}_0^2(s)}\right]^{k-1} \left\{\left[\dot{\psi}_0 \frac{\partial P(\varphi_0, \psi_0)}{\partial x} + \dot{\varphi}_0 \frac{\partial P(\varphi_0, \psi_0)}{\partial y}\right]^k \dot{\psi}_0 - \right.$$

$$\left. - \left[\dot{\psi}_0 \frac{\partial Q(\varphi_0, \psi_0)}{\partial x} + \dot{\varphi}_0 \frac{\partial Q(\varphi_0, \psi_0)}{\partial y}\right]^k \dot{\varphi}_0 + \ldots\right\},$$

где $\varkappa_k$ — постоянные и невыписанные члены содержат производные от $P(x, y)$, $Q(x, y)$ порядка ниже k. Предполагая, что система (A) класса не меньшего N, докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 3. *Существует функция $F(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные до порядка $N+1$ (определенная в области g), такая, что при всех t*: а) $F[\varphi_0(t), \psi_0(t)] \equiv 0$; б) $[F'_x(\varphi_0(t), \psi_0(t))]^2 + [F'_y(\varphi_0(t), \psi_0(t))]^2 \neq 0$; в) $F'_x[\varphi_0(t), \psi_0(t)]\dot{\psi}_0(t) - F'_y[\varphi_0(t), \psi_0(t)]\dot{\varphi}_0(t) \neq 0$.

Предположим, что замкнутая траектория L_0 системы (A) класса N (аналитического класса) есть негрубый N-кратный предельный цикл ([4]), т. е. $\psi^{(i)}(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $\psi^{(N)}(0) \neq 0$. Рассмотрим следующую измененную систему частного вида:

$$dx/dt = \overline{P}(x, y, \lambda) = P(x, y) + \lambda_1 F F'_x + \ldots + \lambda_{N-1} F^{N-1} F'_x,$$
$$dx/dt = \overline{Q}(x, y, \lambda) = Q(x, y) + \lambda_1 F F'_y + \ldots + \lambda_{N-1} F^{N-1} F'_y. \qquad (\bar{A}_\lambda)$$

Очевидно, $x = \varphi_0(t)$ $y = \psi_0(t)$ является решением этой системы, т. е. L_0 является ее траекторией.

Лемма 4. *Если для замкнутой траектории L_0 системы* (A) *класса N — 1 (аналитического класса) выполняются условия $\psi^{(i)}(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, то производные от функции $\overline{\psi}(n_0)$ в случае системы* ($\bar{A}_\lambda$) *имеют вид*

$$\overline{\psi}'(0) = e^{\lambda_1 a_1} - 1, \quad \overline{\psi}^{(k)}(0) = \lambda_k a_k + \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_k), \quad k = 1, \ldots, N-1, \qquad (2)$$

где постоянная $a_k \neq 0$ и $\varphi_k(0, \ldots, 0, \lambda_k) = 0$.

В справедливости леммы нетрудно убедиться, если воспользоваться для нахождения $\overline{\psi}^{(k)}(0)$ выражениями (1), в которых вместо P и Q подставлены $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ (это возможно в силу того, что $F(\varphi_0, \psi_0) \equiv 0$, т. е. L_0 есть траектория системы ($\bar{A}_\lambda$)). Тогда в подинтегральном выражении Φ_k члены, содержащие λ_k в первой степени, будут

$$\left[\frac{f'_s(s, 0, 0)}{\dot{\varphi}_0^2(s) + \dot{\psi}_0^2(s)}\right]^{k-1} \{F'_y(\varphi_0, \psi_0)\dot{\varphi}_0 - F'_x(\varphi_0, \psi_0)\dot{\psi}_0\}^k,$$

где возведение в степень имеет уже не символический, а обыкновенный смысл. Отсюда, принимая во внимание условие леммы, нетрудно убедиться в справедливости выражений (2).

Теорема 3. *Если замкнутая траектория L_0 системы* (A) *класса N (аналитического класса) является негрубым предельным циклом кратности N, то*: а) *существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что у всякой системы* ($\bar{A}$) *класса N (аналитического класса), δ_0-близкой до ранга N к системе* (A), *в ε_0-окрестности L может быть не более N замкнутых траекторий (предельных циклов)*; б) *при любых положительных $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\delta < \delta_0$ можно указать систему* ($\bar{A}$) *класса N (аналитического класса), δ-близкую до ранга N к системе* (A), *у которой в ε-окрестности L_0 существует N предельных циклов.*

Доказательство этой теоремы основывается на предыдущей лемме.

Поступило
20 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Андронов, Л. Понтрягин, ДАН, **14**, № 5 (1937). [2] А. Андронов, Е. Леонтович, ДАН, **21**, № 9, 427 (1938). [3] Е. Леонтович, ДАН, **78**, № 4 (1951). [4] А. Андронов, Е. Леонтович, Уч. зап. Горьковск. гос. унив., **6**, 1 (1938). [5] Н. Баутин, Матем. сборн., **30**, (72) : 1 (1952). [6] Н. Отроков, Матем. сборн., **34** (76):1 (1954). [7] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950.