Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 4

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

О. П. ДЕМЧЕНКО

ПОЛУЧЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ ПОМОЩИ КРИВЫХ МИХАЙЛОВА

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 26 XI 1954)

При анализе качества систем автоматического регулирования наиболее предпочтителен метод, который позволяет решать вопросы устойчивости и качества комплексно, сокращая объем вычислительной и графической работы. Значительным шагом вперед в направлении комплексного исследования устойчивости и качества систем автоматического регулирования явилась работа В. В. Солодовникова (1), использовавшего амплитудно-фазовую характеристику для нахождения вещественной и мнимой частотных характеристик при помощи предложенных им круговых диаграмм.

При выводе основных соотношений нами будет использован оператор дифференцирования, предложенный В. С. Кулебакиным (2,3) и названный им $K(D)$-изображением функции.

$K(D)$-изображение функции представляет собой такой оператор дифференцирования, который, будучи умножен на заданную функцию $f(t)$, обращает ее тождественно в нуль

$$K(D)\,f(t) \equiv 0. \tag{1}$$

В частности, если заданная функция имеет вид $f_1(t) = \sin \omega t$ или $f_2(t) = \cos \omega t$, то $K(D)$-изображение этих функций $K(D) = (D^2 + \omega^2)$ (здесь и в дальнейшем $D = d/dt$). На самом деле,

$$(D^2 + \omega^2) \sin \omega t \equiv 0; \quad (D^2 + \omega^2) \cos \omega t \equiv 0. \tag{2}$$

Очевидно, что для функций вида $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, где A — постоянное число, $K(D)$-изображение будет таким же, как и для функций $\sin \omega t$ или $\cos \omega t$:

$$(D^2 + \omega^2)\, A \sin(\omega t + \varphi) \equiv 0. \tag{3}$$

Для многих функций $K(D)$-изображение представляет собой знаменатель их лапласова преобразования, если в последнем комплексную переменную p заменить символом $D = d/dt$. Это обстоятельство значительно облегчает отыскание $K(D)$-изображения заданной функции.

Перейдем к рассмотрению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, описывающего возмущенное движение системы автоматического регулирования. Предположим, что дифференциальное уравнение, описывающее поведение какой-либо из обобщенных координат системы x под влиянием возмущающего воздействия $f(t)$, имеет вид

$$\begin{aligned}(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)x = \\ = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \ldots + b_1 D + b_0) f(t).\end{aligned} \tag{4}$$

Известно, что если на вход такой системы подать возмущение вида $f(t) = a \sin \omega_i t$, то через некоторое время, достаточное для затухания переходного процесса, на выходе мы получим установившиеся вынужденные колебания вида $x_в = A \sin [\omega_i t + \varphi(\omega_i)]$, где A — амплитуда, $\varphi(\omega_i)$ — фаза вынужденных колебаний. Следовательно, в этом случае $K(D)$-изображения $f(t)$ и $x_в$ будут одинаковыми и равными $(D^2 + \omega_i^2)$.

Полагая $f(t) = a \sin \omega_i t$, разделив левую и правую части уравнения (4) на двучлен $(D^2 + \omega_i^2)$ и рассматривая только вынужденные колебания, получим $[M(D)(D^2 + \omega_i^2) + cD + d] x_в = [N(D)(D^2 + \omega_i^2) + eD + g] a \sin \omega_i t$, где многочлены $M(D)$ и $N(D)$ — частные от деления, соответственно, левой и правой частей дифференциального уравнения (4), а $(cD + d)$ и $(eD + g)$ — остатки.

На основании (2) и (3) $M(D)(D^2 + \omega_i^2) x_в = N(D)(D^2 + \omega_i^2) a \sin \omega_i t \equiv 0$, тогда

$$(cD + d) x_в = (eD + g) a \sin \omega_i t. \tag{5}$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению первого порядка, решив которое, можно определить амплитуду и фазу вынужденных колебаний. Очевидно, что если изменять частоту возмущающего воздействия, то соответственно будут меняться коэффициенты уравнения (5). Легко установить зависимость этих коэффициентов от частоты. В самом деле, если многочлен вида $(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)$ разделить на двухчлен $(D^2 + \omega_i^2)$, то в остатке получим $(a_1 - a_3 \omega_i^2 + a_5 \omega_i^4 - \ldots) D + (a_0 - a_2 \omega_i^2 + a_4 \omega_i^4 - \ldots)$. Тогда уравнение (5) можно переписать в виде:

$$[(a_1 - a_3 \omega_i^2 + a_5 \omega_i^4 - \ldots) D + (a_0 - a_2 \omega_i^2 + a_4 \omega_i^4 - \ldots)] x_в =$$

$$= [(b_1 - b_3 \omega_i^2 + b_5 \omega_i^4 - \ldots) D + (b_0 - b_2 \omega_i^2 + b_4 \omega_i^4 - \ldots)] a \sin \omega_i t, \tag{6}$$

где $c = a_1 - a_3 \omega_i^2 + a_5 \omega_i^4 - \ldots$; $d = a_0 - a_2 \omega_i^2 + a_4 \omega_i^4 - \ldots$; $e = b_1 - b_3 \omega_i^2 + b_5 \omega_i^4 - \ldots$; $g = b_0 - b_2 \omega_i^2 + b_4 \omega_i^4 - \ldots$

Нетрудно убедиться, что коэффициенты, стоящие перед оператором дифференцирования D, представляют собой мнимую составляющую вектора кривой А. В. Михайлова, деленную на частоту $v(\omega_i)/\omega_i$, а свободный член — вещественную составляющую $u(\omega_i)$. Если подставить вместо оператора дифференцирования величину $j\omega_i$, то получим уравнения характеристических кривых Михайлова

$$F(j\omega_i) = u(\omega_i) + jv(\omega_i) \tag{7}$$

для левой части уравнения (6) и

$$F_1(j\omega_i) = u_1(\omega_i) + jv(\omega_i) \tag{8}$$

для правой части.

Имея в виду (7) и (8) и обозначая $v(\omega_i)$, $u(\omega_i)$, $v_1(\omega_i)$ и $u_1(\omega_i)$ просто через v, u, v_1 и u_1, можем записать уравнение (6) в виде

$$\left[\frac{v}{\omega_i} D + u\right] x_в = \left[\frac{v_1}{\omega_i} D + u_1\right] a \sin \omega_i t, \quad 0 < \omega_i < \infty. \tag{9}$$

Решение дифференциального уравнения (9) не представляет никаких трудностей, поэтому мы сразу приведем его окончательный вид для какой-либо выбранной частоты ω_i:

$$x_{\text{в}} = a\,\frac{(v_1 v + u_1 u)\sin\omega_i t + (v_1 u - v u_1)\cos\omega_i t}{v^2 + u^2}, \quad 0 < \omega_i < \infty, \tag{10}$$

откуда фаза вынужденных колебаний равна

$$\varphi(\omega_i) = \operatorname{arc\,tg}\frac{v_1 u - v u_1}{v_1 v + u_1 u}, \quad 0 < \omega_i < \infty, \tag{11}$$

а амплитуда

$$A(\omega_i) = a\sqrt{\frac{(v_1 u - v u_1)^2 + (v_1 v + u_1 u)^2}{(v^2 + u^2)^2}} = a\sqrt{\frac{v_1^2 + u_1^2}{v^2 + u^2}}, \quad 0 < \omega_i < \infty. \tag{12}$$

Так как в данном случае нас интересует частное решение исходного дифференциального уравнения (4), постоянные интегрирования опускаем.

Построим кривые Михайлова для правой и левой частей уравнений (4) и (9) в одной системе координат, откладывая по оси абсцисс вещественные части, а по оси ординат — мнимые (см. рис. 1). Проведем из начала координат на кривые Михайлова для правой и левой частей уравнения векторы $R(\omega_i)$ и $r(\omega_i)$ в точки, соответствующие одной и той же частоте, положим ω_i. Тогда амплитуда вынужденных колебаний на основании (12) будет $A(\omega_i) = a\sqrt{\dfrac{v_1^2 + u_1^2}{v^2 + u^2}} = a\dfrac{R(\omega_i)}{r(\omega_i)}$, $0 < \omega_i < \infty$. Далее из рис. 1 следует, что

$$\begin{aligned} v_1 &= R(\omega_i)\sin\beta(\omega_i), \quad & v &= r(\omega_i)\sin\alpha(\omega_i), \\ u_1 &= R(\omega_i)\cos\beta(\omega_i), \quad & u &= r(\omega_i)\cos\alpha(\omega_i). \end{aligned} \tag{13}$$

Подставив эти значения в формулу (11), получим $\varphi(\omega_i) = \beta(\omega_i) - \alpha(\omega_i)$, $0 < \omega_i < \infty$. Аналогично можно получить амплитуду и фазу вынужденных колебаний для любой другой частоты.

При исследовании следящих систем часто интересуются не только величинами амплитуды и фазы вынужденных колебаний при синусоидально изменяющемся задающем воздействии, но также величиной ошибки

$$\varepsilon(t) = f(t) - x(t), \tag{14}$$

где $f(t)$ — задающее воздействие, $x(t)$ — значение выходной величины.

Рассмотрим, как можно определить значения амплитуды и фазы установившейся ошибки при синусоидальном задающем воздействии, пользуясь ранее полученными соотношениями.

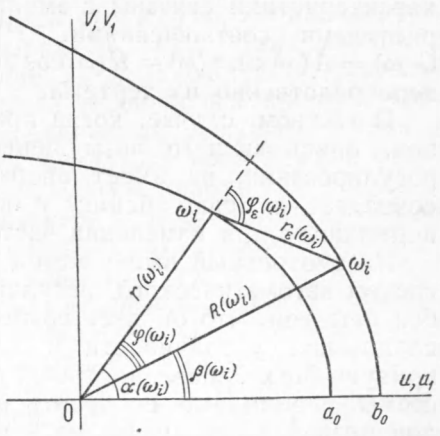


Рис. 1

Положив для простоты амплитуду синусоидального возмущающего воздействия равной единице и принимая во внимание (14) и (9), можно записать*

* Так как линейная комбинация синусоидальных величин с одной и той же частотой есть синусоидальная величина с той же частотой, $K(D)$-изображение ошибки будет таким же, как и возмущающего воздействия, поэтому равенство (15) справедливо.

$$\left(\frac{v}{\omega_i}D+u\right)\varepsilon_{\text{в}}=\left(\frac{v-v_1}{\omega_i}D+u-u_1\right)\sin\omega_i t,\quad 0<\omega_i<\infty. \tag{15}$$

Уравнение (15) решается аналогично уравнению (9). В этом случае фаза ошибки определится равенством

$$\varphi_\varepsilon(\omega_i)=\operatorname{arc\,tg}\frac{(v-v_1)u-(u-u_1)v}{(v-v_1)v+(u-u_1)u}=\frac{u_1v-v_1u}{v^2+u^2-v_1v-u_1u},\quad 0<\omega_i<\infty, \tag{16}$$

а амплитуда ошибки

$$A_\varepsilon(\omega_i)=\sqrt{\frac{(v-v_1)^2+(u-u_1)^2}{v^2+u^2}},\quad 0<\omega_i<\infty. \tag{17}$$

Амплитуду и фазу ошибки можно легко определить графически. Подставив в (17) значение величин из (13), получим:

$$A_\varepsilon(\omega_i)=\sqrt{\frac{r^2(\omega_i)+R^2(\omega_i)-2r(\omega_i)R(\omega_i)\cos\varphi(\omega_i)}{r^2(\omega_i)}},\quad 0<\omega_i<\infty. \tag{18}$$

Числитель подкоренного выражения есть квадрат стороны, замыкающей концы векторов $R(\omega_i)$ и $r(\omega_i)$. Обозначив модуль замыкающего вектора через $r_\varepsilon(\omega_i)$, получим $A_\varepsilon(\omega_i)=r_\varepsilon(\omega_i)/r(\omega_i)$, $0<\omega_i<\infty$. Если обозначим угол, образованный вектором $r_\varepsilon(\omega_i)$ с осью абсцисс $\gamma(\omega_i)$, то легко показать, что фаза ошибки $\varphi_\varepsilon(\omega_i)$ равна $\varphi_\varepsilon(\omega_i)=\gamma(\omega_i)-\alpha(\omega_i)$, $0<\omega_i<\infty$ ($\varphi_\varepsilon(\omega_i)$ — угол, образованный продолжением вектора $r(\omega_i)$ и вектором $r_\varepsilon(\omega_i)$, (см. рис. 1).

В общем виде, для любой частоты синусоидального возмущающего воздействия с амплитудой a, амплитуда и фаза ошибки выразятся формулами: $A_\varepsilon(\omega_i)=ar_\varepsilon(\omega_i)/r(\omega_i)$, $\varphi_\varepsilon(\omega_i)=\gamma(\omega_i)-\alpha(\omega_i)$, $0<\omega_i<\infty$.

Имея в виду, что вещественная $P(\omega)$ и мнимая $Q(\omega)$ частотные характеристики связаны с амплитудной $A(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ характеристиками соотношениями: $P(\omega)=A(\omega)\cos\varphi(\omega)=R(\omega)\cos\varphi(\omega)/r(\omega)$, $Q(\omega)=A(\omega)\sin\varphi(\omega)=R(\omega)\cos\varphi(\omega)/r(\omega)$, их также можно получить непосредственно из чертежа.

В частном случае, когда правая часть дифференциального уравнения, описывающего возмущенное движение системы автоматического регулирования, не имеет операторов дифференцирования, вектор R совпадает с осью абсцисс и остается постоянным по величине и неподвижным при изменении частоты.

Рассмотренный выше метод получения частотных характеристик систем автоматического регулирования кроме своей наглядности удобен еще тем, что он дает возможность комплексно решать задачи исследования устойчивости и качества. Имея в своем распоряжении кривую Михайлова, построенную для определения устойчивости системы, необходимо построить в том же масштабе кривую Михайлова для правой части уравнения в пределах интересующего нас диапазона частот, после чего непосредственно из чертежа с достаточной для практики точностью можно определить все необходимые частотные характеристики.

Поступило
22 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Солодовников, Частотный метод анализа качества систем автоматического регулирования, 1950. [2] В. С. Кулебакин, ДАН, **77**, № 2, 265 (1951). [3] В. С. Кулебакин, ДАН, **68**, № 5 (1949).