

А. Г. СИТЕНКО и М. И. КАГАНОВ

# О ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 14 X 1954)

1. Вопрос о потерях энергии заряженной частицей, движущейся в анизотропной среде, неоднократно рассматривался <sup>(1-3)</sup>. Однако вычисление полных потерь энергии в этом случае проводилось непосредственно, что привело к появлению расходящегося выражения, которое трактовалось как возникновение интенсивного черенковского излучения в анизотропных средах <sup>(2,3)</sup>. Последовательное вычисление полных потерь, как будет видно ниже, не приводит к расходящемуся выражению.

2. Так же как и в <sup>(2,3)</sup>, мы рассматриваем движение точечного заряда  $q$  с постоянной скоростью  $v = \beta c$  по оси симметрии одноосного кристалла.

Тогда полные потери (без учета парных столкновений) определяются известным выражением:

$$-\frac{dE}{dz} = \frac{q^2}{\pi c^2} 2 \operatorname{Re} i \int_0^\infty \omega d\omega \left( \frac{1}{\beta^2 \epsilon_r} - 1 \right) \int_0^{x_m} \frac{x dx}{x^2 - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_r} (\beta^2 \epsilon_r - 1) \frac{\omega^2}{v^2}}. \quad (1)$$

Интегрирование по  $x$  ( $x$  — составляющая волнового вектора  $\mathbf{k}$ , перпендикулярная направлению движения заряда) производится здесь до некоторого максимального значения  $x_m$ , так как применение макроскопического рассмотрения при достаточно больших  $x$  (или, что то же, на достаточных малых расстояниях) незаконно <sup>(4)</sup>.

Производя интегрирование по  $x$ , найдем:

$$-\frac{dE}{dz} = \frac{q^2}{\pi c^2} \operatorname{Re} i \int_0^\infty \omega d\omega \left( \frac{1}{\beta^2 \epsilon_r} - 1 \right) \ln \left( 1 + \frac{x_m^2 v^2 \epsilon_r}{\omega^2 \epsilon_z (1 - \beta^2 \epsilon_r)} \right). \quad (1')$$

При отсутствии общих нулей у функций  $\epsilon_r$  и  $\epsilon_z$  в предположении исчезающе малого затухания (области прозрачности диэлектрика) из (1) следует

$$-\frac{dE}{dz} = \frac{q^2}{c^2} \int \left| 1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon_r} \right| \omega d\omega. \quad (2)$$

Здесь интегрирование производится по области

$$\frac{x_m^2 v^2}{\omega^2} > \frac{\epsilon_z(\omega)}{\epsilon_r(\omega)} (\beta^2 \epsilon_r(\omega) - 1) > 0. \quad (3)$$

Выражения (2), (3) отличаются от аналогичных выражений в цитированных работах тем, что, благодаря последовательному введению  $x_m$ ,

частоты, при которых  $\epsilon_r$  обращается в нуль, а интеграл расходится, выпадают из области интегрирования.

Для выяснения характера потерь энергии в случае анизотропного диэлектрика рассмотрим дисперсионное уравнение подобной среды

$$\frac{\kappa_z^2}{\epsilon_z(\omega)} + \frac{\kappa_r^2}{\epsilon_r(\omega)} = \frac{\omega^2}{c^2};$$

$\kappa_z$ ,  $\kappa_r$  — соответственно, продольная и перпендикулярная составляющие волнового вектора.

Заменяя  $\kappa_z$  на  $\omega/v$  (нас интересуют вынужденные волны, связанные с движущейся частицей), получаем условие черенковского излучения<sup>1-3</sup>:

$$\frac{\epsilon_z(\omega)}{\epsilon_r(\omega)} (\beta^2 \epsilon_r(\omega) - 1) > 0. \quad (4)$$

Сравнивая (4) и (3), убеждаемся, что энергия частицы в этом случае расходуется на черенковское излучение.

Отметим, что в случае анизотропного диэлектрика черенковское излучение может происходить и при нерелятивистском движении частицы ( $\beta \rightarrow 0$ ). Действительно, из (2) и (3) имеем

$$-\frac{dE}{dz} = \frac{q^2}{v^2} \int \frac{\omega d\omega}{|\epsilon_r|}.$$

В последнем выражении интегрирование производится по области

$$\frac{\kappa_m^2 v^2}{\omega^2} - \frac{\epsilon_z(\omega)}{\epsilon_r(\omega)} > 0.$$

Полученные выражения (2) и (3) допускают предельный переход к изотропному диэлектрику. При этом область, в которой  $\epsilon_r$  и  $\epsilon_z$  имеют разные знаки, стягивается в точку ( $\epsilon = 0$ ). Частота, в которой  $\epsilon = 0$ , не удовлетворяет условию распространения (4), и следовательно, соответствующее слагаемое определяет поляризационные потери<sup>(2)</sup>.

3. Выражения (2) и (3) описывают потери энергии частицей на дальние столкновения (макроскопические потери). Для получения полных потерь надо к выражению (2) добавить выражение для потерь на близкие столкновения<sup>(4)</sup>. При этом, как легко видеть,  $\kappa_m$  из окончательных формул выпадает. Действительно, логарифмически расходящийся с  $\kappa_m$  член в случае очень общих предположений о дисперсионной зависимости имеет вид

$$\frac{2\pi N e^2 q^2}{m v^2} \ln \frac{m v^2 \kappa_m^2}{4\pi e^2 N}$$

( $N$  — плотность электронов вещества).

Границы полос черенковского излучения могут быть приближенно определены из условия

$$\operatorname{Re} \epsilon_r(\omega) \simeq \operatorname{Im} \epsilon_r(\omega),$$

которое показывает, при каких частотах пренебрежение затуханием незаконно.

4. Остановимся на случае простейшей анизотропной зависимости

$$\begin{aligned} \epsilon_r(\omega) &= 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m} \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2}; & \epsilon_{\perp} &= 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m \omega_r^2}; \\ \epsilon_z(\omega) &= 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m} \frac{1}{\omega_z^2 - \omega^2}; & \epsilon_{\parallel} &= 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m \omega_z^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (2) принимает при этом вид

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dz} &= \frac{2\pi Ne^2 q^2}{mv^2} \left\{ \ln \frac{mv^2 x_m^2}{4\pi e^2 N} + \ln \frac{\varepsilon_{\perp} - 1}{\varepsilon_{\perp}(1 - \beta^2)} - \beta^2 \right\}, & \beta < \frac{1}{V\varepsilon_{\perp}}; \\ -\frac{dE}{dz} &= \frac{2\pi Ne^2 q^2}{mv^2} \left\{ \ln \frac{mv^2 x_m^2}{4\pi e^2 N} - \frac{1 - \beta^2}{\varepsilon_{\perp} - 1} \right\}, & \beta > \frac{1}{V\varepsilon_{\perp}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Полученные выражения отличаются от формул для изотропной среды (см., например, (5)) заменой  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_{\perp}$ ; в этом случае  $\varepsilon_{\parallel}$  вообще не входит в окончательные выражения.

5. Для того чтобы учесть влияние конечности ширины линии поглощения, рассмотрим дисперсионную зависимость в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega \omega_r}; & \Omega^2 &= \frac{4\pi e^2 N}{m}; \\ \varepsilon_z &= 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_z^2 - \omega^2 + i\eta_z \omega \omega_z}; \end{aligned} \quad (7)$$

здесь  $\eta_r$  и  $\eta_z$  — коэффициенты затухания, связанные с шириной линии.

Воспользуемся выражением (1'), причем для вычисления получающихся интегралов деформируем контур интегрирования таким образом, чтобы он проходил вдоль мнимой оси в положительном направлении и возвратился обратно на вещественную ось вдоль четверти окружности бесконечно большого радиуса с центром в начале координат (5).

Произведя вычисления, найдем:

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dz} &= \frac{2\pi Ne^2 q^2}{mv^2} \left\{ \ln \frac{mv^2 x_m^2}{4\pi Ne^2} + \ln \frac{\varepsilon_{\perp} - 1}{\varepsilon_{\perp}(1 - \beta^2)} - \beta^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\eta_r}{(\varepsilon_{\perp} - \eta_r^2)^{1/2}} \arctg \frac{(\varepsilon_{\perp} - \eta_r^2)^{1/2}}{\eta_r} \right\}, & \beta < \frac{1}{V\varepsilon_{\perp}}; \\ -\frac{dE}{dz} &= \frac{2\pi Ne^2}{mv^2} \left\{ \ln \frac{mv^2 x_m^2}{4\pi Ne^2} - \beta^2 + \frac{1 - \beta^2}{\varepsilon_{\perp} - 1} \left[ \left( \eta_r^2 + \frac{\beta \varepsilon_{\perp} - 1}{1 - \beta^2} \right)^{1/2} - \eta_r \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\eta_r}{(\varepsilon_{\perp} - \eta_r^2)^{1/2}} \arctg \frac{(\varepsilon_{\perp} - \eta_r^2)^{1/2}}{\left( \eta_r^2 + \frac{\beta^2 \varepsilon_{\perp} - 1}{1 - \beta^2} \right)^{1/2}} \right\}, & \beta > \frac{1}{V\varepsilon_{\perp}} \end{aligned} \quad (8)$$

Следует отметить, что и с учетом поглощения полученные выражения зависят исключительно от значения  $\varepsilon_r(\varepsilon_{\perp}, \eta_r)$ .

В заключение выражаем благодарность Л. Д. Ландау и А. И. Ахиезеру за ценные советы и И. М. Лифшицу и Я. Б. Файнбергу за дискуссию по затронутым здесь вопросам.

Физико-технический институт  
Академии наук СССР

Поступило  
18 IX 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> В. Гинзбург, ЖЭТФ, 10, 589, 601 (1940). <sup>2</sup> А. Коломенский, ДАН, 86, 1097 (1952). <sup>3</sup> М. Каганов, ЖТФ, 23, 507 (1953). <sup>4</sup> Н. Бор, Прохождение атомных частиц через вещество, ИЛ, М., 1950. <sup>5</sup> E. Fermi, Phys. Rev., 57, 485 (1940).