

Академик Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

О ВРАЩЕНИИ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ

Согласно основным представлениям теории жидкого гелия II ⁽¹⁾, «сверхтекучая часть» массы жидкости может совершать лишь потенциальное движение и, в частности, не может принимать участия во вращении жидкости как целого (например в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси). Как известно, этот вывод теории был подтвержден в опытах Э. Л. Андроникашвили, позволивших непосредственно измерить таким путем отношение ρ_s/ρ_n как функцию температуры.

В этих опытах жидкость приводилась во вращательное колебательное движение с большим периодом (и, соответственно, с малой линейной скоростью). В дальнейшем были поставлены также опыты с быстрым равномерным вращением жидкого гелия в цилиндрическом сосуде ^(2, 3); в опытах Андроникашвили линейная скорость жидкости достигала 40 см/сек, а в опытах Осборна — до 70 см/сек. При этом, однако, оказалось, что глубина образующегося мениска соответствует вращению всей массы жидкости, а не только ее «нормальной части».

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы указать на возможное объяснение этих экспериментальных результатов, вытекающее естественным образом из соображений термодинамической устойчивости.

При вращении (с заданной угловой скоростью Ω) обычной жидкости термодинамическое равновесие достигается тогда, когда жидкость вращается как целое. При вращении же жидкого гелия II увлечение всей его массы требовало бы перехода жидкости целиком в несверхтекучую фазу (гелий I), что было бы связано с большой затратой энергии и потому не может соответствовать термодинамическому равновесию. С другой стороны, и вращение одной только нормальной части массы тоже не является энергетически наиболее выгодным.

Естественно предположить, что наиболее выгодным состоянием, соответствующим термодинамическому равновесию, будет «слоистая» структура вращающейся жидкости, заключающаяся в следующем. При вращении сосуда нормальная часть массы гелия вращается как целое, а в отношении сверхтекучего движения цилиндрический объем жидкости разбивается на ряд коаксиальных цилиндрических слоев, границы между которыми являются поверхностями тангенциальных разрывов сверхтекучей скорости. В каждом из этих слоев имеет место сверхтекучее вращательное движение с круговыми линиями тока и скоростью, распределенной по закону

$$v_s^{(i)} = \frac{b_i}{r}, \quad (1)$$

где r — расстояние до оси цилиндра, а b_i — постоянная, различная для разных слоев (которые мы нумеруем индексом i). Это распределение удовлетворяет уравнению непрерывности несжимаемой жидкости

($\text{div } \mathbf{v}_s = 0$) и в то же время условию потенциальности ($\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$), необходимо для сверхтекучего движения. На границах слоев скорость v_s испытывает по своей величине скачки. Наличие хотя бы одного такого разрыва, во всяком случае, необходимо для осуществления потенциального вращения; распределение (1) не может простирается на весь объем жидкости, так как на оси цилиндра скорость обращалась бы в бесконечность.

Вращение сверхтекучей части массы жидкости увеличивает ее эффективный момент инерции и, тем самым, является энергетически выгодным. В обратном направлении, однако, действует возникновение поверхностей разрыва. Скачок скорости означает наличие «поверхностного ротора» скорости, т. е. представляет собой нарушение потенциальности течения и, таким образом, некоторое «местное» нарушение сверхтекучести. Оно требует определенной затраты энергии, что может быть описано, с макроскопической точки зрения, путем приписывания поверхности разрыва некоторого коэффициента поверхностного натяжения α . Представляется естественным предположить, что при малых значениях скачка скорости α стремится к постоянному пределу; это означало бы необходимость конечной затраты энергии для всякого «местного» нарушения сверхтекучести.

Термодинамическому равновесию при каждом данном значении Ω соответствуют определенные размеры слоев. По мере увеличения Ω толщина слоев, естественно, убывает, и при достаточно больших скоростях вращения слои становятся очень тонкими. С внешней стороны такое движение будет полностью имитировать вращение всей массы жидкости как целого, что и наблюдается, повидимому, в эксперименте. Наличие истинной слоистой структуры должно, однако, проявляться в не вполне ровной, «зазубренной», поверхности мениска.

Подчеркнем, что описанное движение, как соответствующее термодинамически равновесному равномерному вращению, тем самым является термодинамически обратимым, т. е. не сопровождается диссипацией энергии. В этом отношении имеющее здесь место нарушение сверхтекучести отличается от нарушений, происходящих при так называемых критических скоростях.

Произведем количественный расчет при сделанном выше предположении о постоянстве α . Свободная энергия (при заданной температуре) вращающегося цилиндра с жидкостью равна:

$$F = \frac{\rho_n \pi R^4 \Omega^2}{4} + \pi \rho_s \sum_i b_i^2 \ln \frac{r_i}{r_{i+1}} + 2\pi\alpha \sum_i r_{i+1} + \frac{I\Omega^2}{2} \quad (2)$$

(R — радиус цилиндра; I — момент инерции сосуда; индекс $i = 0, 1, 2, \dots$ нумерует последовательные слои в направлении снаружи внутрь, так что $i = 0$ соответствует слою, прилегающему к стенке сосуда; r_i — радиусы границ раздела между слоями, причем $r_0 = R$). Первые два члена представляют собой кинетическую энергию, соответственно, нормального и сверхтекучего движений, а третий — поверхностную энергию разрывов. В термодинамическом равновесии должна быть минимальна (при заданных температуре и Ω) величина $F' = F - M\Omega$, где M — момент импульса вращающейся системы (см., например, (4)). В данном случае

$$M = \frac{\pi R^4}{2} \rho_n \Omega + \rho_s \pi \sum_i b_i (r_i^2 - r_{i+1}^2) + I\Omega, \quad (3)$$

$$F' = -\frac{\rho_n \pi R^4 \Omega^2}{4} - \frac{I\Omega^2}{2} + \pi \rho_s \sum_i \left[b_i^2 \ln \frac{r_i}{r_{i+1}} - \Omega b_i (r_i^2 - r_{i+1}^2) \right] + 2\pi\alpha \sum_i r_{i+1}. \quad (4)$$

Первые два члена в F' не зависят от наличия слоев, и ниже мы их опускаем. Минимизируя F' по b_i , получим:

$$b_i = \frac{\Omega}{2} \frac{r_i^2 - r_{i+1}^2}{\ln \frac{r_i}{r_{i+1}}}. \quad (5)$$

(При малых толщинах слоев b стремится к Ωr^2 , что соответствует вращению жидкости как целого.) Соответствующее значение F' :

$$F' = 2\pi\alpha R \sum_i \left\{ x_{i+1} - \lambda \frac{(x_i^2 - x_{i+1}^2)^2}{\ln \frac{x_i}{x_{i+1}}} \right\}, \quad (6)$$

где введены безразмерные величины $x_i = r_i / R$ и безразмерный параметр

$$\lambda = \frac{\rho_s \Omega^2 R^3}{8\alpha}.$$

Рассмотрим предельный случай $\lambda \ll 1$ (медленное вращение). В этом случае оказывается, что $1 \gg x_1 \gg x_2 \gg \dots$. В связи с этим каждый следующий член суммы в (6) оказывается малым по сравнению с предыдущим, и для определения каждого x_{i+1} достаточно минимизировать один член суммы при заданных значениях предыдущих x_i . Вводя отношение $\xi_{i+1} = x_{i+1} / x_i \ll 1$, напомним отдельный член суммы в (6) в виде $x_i [\xi_{i+1} + \lambda x_i^3 / \ln \xi_{i+1}]$ и из условия его минимальности по ξ_{i+1} получим

$$\sqrt{\xi_{i+1}} \ln \frac{1}{\sqrt{\xi_{i+1}}} = \frac{\sqrt{\lambda x_i^3}}{2}. \quad (7)$$

Таким образом, уже при любой малой скорости вращения возникает бесконечное множество слоев, радиусы x_i которых асимптотически сгущаются по направлению к оси цилиндра (в действительности, разумеется, малые толщины слоев ограничены атомными расстояниями, и потому число слоев велико, но не бесконечно). Наибольший из радиусов дается соотношением $-\sqrt{x_1} \ln \sqrt{x_1} = \sqrt{\lambda} / 2$.

В обратном предельном случае $\lambda \gg 1$ (быстрое вращение) весь объем жидкости разбивается на тонкие слои, причем на не слишком малых (по сравнению с R) расстояниях r от оси толщины h слоев медленно меняются от слоя к слою. В пределе $h \rightarrow 0$ энергия F' соответствовала бы вращающейся как целое жидкости:

$$F' = -\frac{\pi \rho_s \Omega^2}{4} \sum (r_i^4 - r_{i+1}^4) = -2\pi\alpha R \lambda \sum (x_i^4 - x_{i+1}^4).$$

Вычитая эту величину из (6) и разлагая по степеням $\Delta = h / R$, получим для избыточной энергии слоистой структуры, отнесенной к единичному интервалу значений x (т. е. на $1 / \Delta$ слоев), следующее выражение:

$$2\pi\alpha R \left\{ \frac{x}{\Delta} + \frac{4\lambda}{3} x \Delta^2 \right\}.$$

Минимизируя его по Δ , получим

$$\Delta = \left(\frac{3}{8\lambda} \right)^{1/3}, \quad h = \left(\frac{3\alpha}{\rho_s \Omega^2} \right)^{1/3}, \quad (8)$$

чем и определяется искомая толщина слоев.

Не зная α , можно попытаться получить ориентировочную оценку численного значения h , составляя величину требуемой размерности (размерность $h^3\Omega^2$) из следующих макроскопических величин: температура перехода kT_λ , плотность ρ , скорость второго звука u . Таким способом получим

$$h^3\Omega^2 \sim \left(\frac{kT_\lambda u^4}{\rho} \right)^{1/2}.$$

Взяв для u характерное значение ~ 20 м/сек, получим $h^3\Omega^2 \sim 0,3$. Так, для угловых скоростей 8—16 об/сек (как в (2)) эта оценка дает для h значение около 0,05 см.

Вопрос о детальной картине неровности поверхности мениска связан с формой слоев вблизи их выхода к свободной поверхности жидкости и требует особого рассмотрения.

Институт физических проблем им. С. И. Вавилова
Академии наук СССР

Поступило
25 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Ландау, ЖЭТФ, 11, 592 (1941). ² D. V. Osborne, Proc. Phys. Soc., 63 A, 909 (1950). ³ Э. Л. Андроникашвили, Исследования по гидродинамике сверхтекучести, Диссертация, 1948. ⁴ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М.—Л., 3-е изд., § 26, 1951.