Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 4

*МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

О. С. ПАРАСЮК

# К ТЕОРИИ ПРИЧИННЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

*(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 29 X 1954)*

Работами С. Л. Соболева [1] и Л. Шварца [2] положены основы теории сингулярных функций математической физики.

В настоящей заметке, основанной на идеях Н. Н. Боголюбова и тесно примыкающей к работам [3, 4], излагаются некоторые факты теории сингулярных причинных функций. При этом оказалось удобным рассматривать сингулярные функции как функционалы на вводимых ниже пространствах $C(q, r, n)$.

Рассмотрим пространство $C(q, r, n)$ функций $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$, обладающих производными до порядка $q$ и таких, что все произведения

$$x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_s}^{\alpha_s} \frac{\partial^p F(x_1 x_2 \ldots x_n)}{\partial x_{j_1}^{\beta_1} \partial x_{j_2}^{\beta_2} \ldots \partial x_{j_p}^{\beta_p}}, \tag{1}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = s, \quad s = 0, 1, \ldots, r;$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p = p, \quad p = 0, 1, \ldots, q,$$

ограничены.

Легко проверить, что если в пространстве $C(q, r, n)$ ввести норму согласно равенству

$$\| F \| = \sup_{(x, s, p)} \left| x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_s}^{\alpha_s} \frac{\partial^p F}{\partial x_{j_1}^{\beta_1} \partial x_{j_2}^{\beta_2} \ldots \partial x_{j_p}^{\beta_p}} \right|, \tag{2}$$

то оно станет линейным нормированным пространством.

Линейные непрерывные функционалы на пространствах $C(q, r, n)$ ($q, r$ — какие угодно целые числа) будем называть сингулярными функциями и обозначать одним из следующих трех обозначений:

$$K(F) \equiv \int K(x_1 x_2 \ldots x_n) F(x_1 x_2 \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \equiv K(x_1 x_2 \ldots x_n). \tag{3}$$

Следуя Н. Н. Боголюбову, будем также говорить, что $K(x_1 x_2 \ldots x_n)$ интегрируемая в классе $C(q, r, n)$.

Сингулярные функции можно также определять, используя понятие слабой сходимости функционалов.

Пусть $K_M(x_1 x_2 \ldots x_n)$ — некоторая последовательность обычных функций, интегрируемых в некотором классе $C(q, r, n)$. Если последовательность линейных функционалов $K_M(F)$ слабо сходится при $M \to \infty$, то предельный функционал $K(F)$ будет определять, вообще говоря, некоторую сингулярную функцию. В этом случае будем говорить, что последовательность сходится в несобственном смысле, и писать $K_M \underset{M \to \infty}{\longrightarrow} K$.

Основой дальнейших построений является

Теорема 1. *Если сингулярная функция $K(x)$, интегрируемая в классе $C(q, r, n)$, продолжается до сингулярной функции, интегрируемой в классе $C(q', r', n)$, где $q' < q$, $r' < r$, то это продолжение единственно.*

Дальнейшее построение теории можно вести параллельно книге Шварца [2]. При построении теории преобразования Фурье может быть использована следующая

Лемма 1. *Для заданного пространства $C(q, r, n)$ существует такое пространство $C(q', r', n)$, что для всех $\Phi(\ldots k \ldots) \in C(q', r', n)$ функции*

$$F(\ldots x \ldots) = \int \Phi(\ldots k \ldots) e^{ikx} dk \in C(q, r, n)$$

*и*

$$\| F \| \leqslant N \| \Phi \|,$$

*где $N$ — некоторая константа.*

На основе леммы 1 преобразование Фурье может быть определено обычным способом, исходя из равенства Парсеваля.

Важную роль в дальнейшем будет играть

Теорема 2. *Пусть последовательность $K^1_M(x)$ непрерывных в $R^n(x_1 x_2 \ldots x_n)$ и интегрируемых в $C(q, r, n)$ функций сходится в несобственном смысле к сингулярной функции $K^1(x)$, а последовательность $K^2_M(y)$ непрерывных в $R^m(y_1 y_2 \ldots y_m)$ и интегрируемых в $C(q', r', m)$ функций сходится к сингулярной функции $K^2(y)$ и аргументы $x$ и $y$ независимы.*

*Тогда произведение $K^1_M(x) K^2_M(y)$ сходится в несобственном смысле к некоторой сингулярной функции.*

Эту функцию условимся обозначать через $K^1(x) K^2(y)$ и будем ее называть прямым произведением функций $K^1(x)$ и $K^2(y)$.

Займемся теперь введением основного для нас понятия причинной сингулярной функции. Импульсный образ $\tilde{D}^c(k)$ причинной сингулярной функции можно определить как несобственный предел выражения $\frac{P(k)}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}$

$$\tilde{\Delta}^c(k) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(k)}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}. \qquad (4)$$

Можно показать, что такой предел действительно существует.

Так называемая регуляризация Паули Вилларса [5] может быть, с нашей точки зрения, интерпретирована как процесс аппроксимации в несобственном смысле причинной сингулярной функции при помощи регуляризованных ковариантных функций:

$$\operatorname{reg} \Delta^c_M(x) = \Delta^c(x) + \sum c_j \Delta^c_{M_j}(x), \qquad (5)$$

где $c_j$ ограничены при $M_j \to \infty$ и удовлетворяют линейным условиям вида

$$\sum c_j M_j^{2l} = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, h.$$

Существование несобственного предела

$$\operatorname{reg} \Delta^c_M(x) \underset{M \to \infty,\ r \to 0}{\to} \Delta^c(x)$$

может быть строго доказано.

В дополнение к результатам работ [3,4] может быть доказана следующая

Теорема 3. *Для всех функций* $F(x_1 x_2 \dots x_n)$, *принадлежащих к некоторому классу* $C(q, r, n)$ ($q, r$ — *достаточно большие числа*) *и обращающихся в нуль вместе с достаточно высоким числом производных, при совпадении аргументов выражение*

$$R^0_{\varepsilon, M} = \int \left\{ \prod_l \operatorname{reg} \Delta^c_l (x_r - x_s) \right\} F(x_1 x_2 \dots x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n \qquad (6)$$

*стремится к пределу при* $\varepsilon \to 0$, $M_j \to \infty$.

Смысл этой теоремы состоит в том, что с ее помощью определяется произведение причинных сингулярных функций $\prod_l \Delta^c_l (x_r - x_s)$ при несовпадающих аргументах ($x_r \neq x_s$).

Введенный в работах [3,4] функционал $R$ можно теперь рассматривать как продолжение импульсного образа функционала $R^0 = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ M \to \infty}} R^0_{\varepsilon, M}$ на все пространство $C(q, r, n)$.

Доказательство этой теоремы ведется в импульсном представлении. При этом используется запись импульсного образа причинной сингулярной функции $\operatorname{reg} \tilde{\Delta}^c(k)$ в виде

$$\operatorname{reg} \tilde{\Delta}^c(k) = \lim_{\varepsilon \to 0} i \int I(\alpha)\, e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}\, d\alpha \cdot P(k). \qquad (7)$$

В силу теоремы 2 достаточно рассматривать случай только связных диаграмм. В этом случае импульсный образ произведения регуляризованных причинных функций может быть записан в виде

$$I_M(\dots k \dots) = \delta\left(\sum k\right) \int_0^\infty \dots d\alpha_l \dots e^{-i\Sigma\alpha_l m_l^2 - \varepsilon\Sigma\alpha} \prod_l I(\alpha_l) f(\dots k \dots \alpha), \qquad (8)$$

где $f(\dots k \dots \alpha) = F(\dots k \dots \alpha) e^{i\Sigma A_{ab} k_a k_b}$; $F(\dots k \dots \alpha)$ — полином по $k$, рациональная функция по $\alpha_l$, имеющая единственную особенность в виде полюса при $\alpha_l = 0$; $\sum A_{ab} k_a k_b$ — квадратичная форма по $k_a$, коэффициенты которой являются однородными функциями первой степени по $\alpha_l$. Далее при помощи математической индукции доказывается

Лемма 2. *Пусть* $\partial^r_k$ — *символ* $r$-*кратного дифференцирования типа* $\frac{\partial}{\partial k}$, $\frac{\partial}{\partial k_i} \pm \frac{\partial}{\partial k_j}$. *При достаточно большом* $r$ *выражение*

$$\int \partial^r_k I_M(\dots k \dots) \Phi(\dots k \dots)\, dk, \qquad (9)$$

*где* $\Phi(\dots k \dots)$ — *любая функция из некоторого фиксированного класса* $C(q, r, n)$, *стремится при* $\varepsilon \to 0$, $M_j \to \infty$ *к определенному пределу*.

Из этой леммы уже дальше легко следует доказательство теоремы 2.

В заключение выражаю искреннюю благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за ценные указания при выполнении настоящей работы.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
21 X 1954

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Матем. сборн., **1** (43), 39 (1936). [2] L. Schwartz, Théorie des distributions, Paris, 1950—1951. [3] Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк, ДАН, **100**, № 1 (1954). [4] Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк, ДАН, **100**, № 3 (1954). [5] Паули Вилларс, Сборн. Сдвиг уровней атомных электронов, под ред. Д. Д. Иваненко, М., 1949.