Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. М. ЭЙДУС

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\Delta u + \lambda^2 u = 0$

(Представлено академиком В. И. Смирновым 17 XI 1954)

1. Пусть Ω — конечная односвязная область в трехмерном пространстве, ограниченная поверхностью S, удовлетворяющей условиям Ляпунова. Рассмотрим интегральный оператор A в пространстве $L_2(S)$, определяемый равенством

$$Af = \int_S \frac{\sin \lambda r_{xy}}{r_{xy}} f(y)\, dS_y,$$

где λ — некоторое вещественное число, не равное нулю; r_{xy} — расстояние между точками x и y, лежащими на S. Установим связь между уравнением

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \tag{1}$$

в Ω при краевом условии

$$u|_S = 0 \tag{2}$$

и уравнением

$$Af = 0. \tag{3}$$

Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2); тогда, как нетрудно доказать, функция $f = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S$, где n — направление внешней нормали в точках S, является решением уравнения (3). Докажем обратное утверждение.

Теорема. *Пусть f — решение уравнения* (3); *тогда существует такое решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* (2), *что* $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f$.

При доказательстве будем пользоваться следующими обозначениями: если x — точка пространства, то ее радиус-вектор обозначим через $\bar{x}$, модуль радиуса-вектора — через r_x, координаты точки x обозначим через x_1, x_2, x_3.

Переходя к доказательству, введем в рассмотрение функцию

$$F(\alpha) = \int_S e^{i\lambda(\bar{y}\alpha)}\, f(y)\, dS_y,$$

где α — точка на сфере ω единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда

$$(Af,\ f) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_\omega |F(\alpha)|^2\, d\omega. \tag{4}$$

Рассмотрим потенциал простого слоя

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{e^{-i\lambda r_{xy}}}{r_{xy}} f(y)\,dS_y.$$

Пусть $r_x\to\infty$ и $\bar{\alpha}=\frac{\bar{x}}{r_x}$, тогда имеет место оценка

$$u(x)=\frac{e^{-i\lambda r_x}}{4\pi r_x}F(\alpha)+O\left(\frac{1}{r_x^2}\right). \tag{5}$$

Из (3), (4), (5) получим

$$u(x)=O\left(\frac{1}{r_x^2}\right). \tag{6}$$

Построим сферу σ радиуса R с центром в начале координат так, чтобы поверхность S содержалась внутри σ. Обозначим через T_1 область $r_x<R$, через T_2 — область $r_x>R$. Радиус R выберем так, чтобы число λ^2 не являлось собственным значением уравнения (1) в области T_1 при краевом условии $u|_\sigma=0$. Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения $\Delta v+\lambda^2 v=0$ в T_2, удовлетворяющего условию

$$\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\sigma=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\sigma$$

и условиям излучения на бесконечности. Эта задача имеет решение, представимое в виде потенциала простого слоя

$$v(x)=\int_\sigma \frac{e^{-i\lambda r_{xy}}}{r_{xy}}\varphi(y)\,d\sigma_y. \tag{7}$$

В силу единственности решения задачи $u(x)=v(x)$ в T_2. Применяя к потенциалу (7) оценку (5) и учитывая (6), получим, что функция

$$\Phi(x)=\int_\sigma e^{\frac{i\lambda}{R}\sum_{k=1}^{3}x_k y_k}\varphi(y)\,d\sigma_y$$

равна нулю на σ. Легко видеть, что $\Phi(x)$ есть решение уравнения (1), следовательно, $\Phi(x)=0$ в T_1. Вычисляя производные функции $\Phi(x)$ в начале координат, получим

$$\int_\sigma y_1^p y_2^q y_3^r \varphi(y)\,d\sigma_y=0,$$

где p, q, r — произвольные целые неотрицательные числа. Отсюда $\varphi(y)=0$ на σ и $u(x)=0$ в T_2, а следовательно, $u(x)=0$ всюду вне S. Отсюда вытекает, как нетрудно доказать, что в точках S $u_i(x)=0$. По теореме о скачке нормальной производной потенциала простого слоя почти везде на S $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i=f$. Теорема доказана.

2. Пусть теперь $\lambda^2>0$ не является собственным значением уравнения (1) при краевом условии (2). Тогда, согласно доказанной теореме, уравнение (3) будет иметь только тривиальное решение. Отсюда и из (4) следует, что при этом все собственные значения μ_m

оператора A положительны. Обозначим через $\theta_m(x)$ систему собственных функций оператора A, так что $A\theta_m = \mu_m\theta_m$. Оператор A самосопряженный и вполне непрерывный, следовательно, система θ_m полна в $L_2(S)$.

Рассмотрим теперь задачу о решении уравнения (1) при краевом условии

$$u|_S = \psi,$$

где $\psi(x)$ — заданная на S непрерывная функция. Разложим функцию ψ в ряд по собственным функциям θ_m, сходящийся в $L_2(S)$:

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} (\psi,\ \theta_m)\,\theta_m.$$

Доказывается, что решение краевой задачи $u(x)$, где $x \in \Omega$, имеет вид

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\psi,\ \theta_m)}{\mu_m} \int_S \frac{\sin \lambda r_{xy}}{r_{xy}}\,\theta_m(y)\,dS_y. \tag{8}$$

Ряд (8) сходится в $L_2(\Omega)$ и, следовательно, он сходится равномерно в любой области Ω_1, содержащейся вместе с границей в Ω. Кроме того ряд (8) можно почленно дифференцировать внутри Ω по координатам x_1, x_2, x_3 сколько угодно раз. Ряды, получаемые почленным дифференцированием, также сходятся равномерно в любой области Ω_1.

Общий случай n-мерного пространства рассматривается аналогично, оператор A в этом случае имеет вид

$$Af = 2^k\Gamma(k+1)\int_S \frac{J_k(\lambda r_{xy})}{r_{xy}^k} f(y)\,dS_y,$$

где $k = \dfrac{n-2}{2}$.

Ленинградский институт
авиационного приборостроения

Поступило
12 XI 1954