Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 4

*МАТЕМАТИКА*

Г. Ш. РУБИНШТЕЙН

# ЗАДАЧА О КРАЙНЕЙ ТОЧКЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОСИ С МНОГОГРАННИКОМ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

*(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 XI 1954)*

Рассмотрим в $n$-мерном вещественном пространстве $R^n$ многогранник $M$, являющийся выпуклой оболочкой заданного множества точек $A = \{a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})\}_{i=1,2,\ldots,m} \subset R^n$, и некоторую ось $B = \{b = c + \lambda d\}_{\lambda \in (-\infty, \infty)}$, определяемую точками $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ и $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$.

Под задачей о крайней точке пересечения оси $B$ с многогранником $M$ будем понимать следующее*:

1. Установить, имеют ли $B$ и $M$ общие точки.

2. Если $B \cap M \neq \Lambda$ ($\Lambda$ — знак пустого множества), то: а) определить $\lambda_0$, равное максимуму $\{\lambda\}_{c+\lambda d \in M}$; б) указать вершины симплекса $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, внутри которого расположена $b_0 = c + \lambda_0 d$ — крайняя точка пересечения оси $B$ с многогранником $M$; в) найти гиперплоскость $H_0$, строго отделяющую луч $Л(b_0, b_0 + d) = \{b = b_0 + \lambda d\}_{\lambda > 0}$ от многогранника $M$ ($M$ расположено по одну сторону от $H_0$, $Л(b_0, b_0 + d)$ — по другую, причем $H_0 \cap Л(b_0, b_0 + d) = \Lambda$).

3. Если $B \cap M = \Lambda$, то найти гиперплоскость $H_0$, строго отделяющую ось $B$ от многогранника $M$.

К этой геометрической задаче приводится исследование различных вопросов. Остановимся на одном из них.

Исследование конечной системы линейных неравенств. Пусть дана система линейных неравенств

$$\alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{i\,n-1}\xi_{n-1} \leqslant \alpha_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

В $n$-мерном пространстве $R^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ рассмотрим многогранник $M$ — выпуклую оболочку множества $A = \{a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})\}_{i=1, 2, \ldots, m}$ и ось $B = \{b = (0, 0, \ldots, 0, -\lambda)\}_{\lambda \in (-\infty, \infty)}$ (в этом случае $c = 0$, $d = (0, 0, \ldots, 0, -1)$). Очевидно: 1) каждый луч $Л(b, b + d)$, не имеющий общих точек с многогранником $M$, можно стого отделить от $M$ гиперплоскостью, проходящей через $b$; 2) уравнение каждой гиперплоскости, содержащей точку $b = \lambda d$ и строго отделяющей луч $Л(b, b + d)$ от многогранника $M$, можно привести (умножением на скаляр) к виду: $\xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \ldots + \xi_{n-1}\alpha_{n-1} - \alpha_n = \lambda$. Точка $b + d$ при этом не лежит в полупространстве $\xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \ldots + \xi_{n-1}\alpha_{n-1} - \alpha_n \leqslant \lambda$; поэтому многогранник $M$ и, в частности, точки множества $A$ расположены в этом полупространстве.

---

* В дальнейшем эту задачу будем именовать просто «задачей о крайней точке».

Исходя из 1) и 2), легко проверить:

1. Если $B \cap M \neq \Lambda$, то:

а) Система (1) разрешима при $\lambda_0 = \max\limits_{\lambda d \in M} \lambda \leqslant 0$ и несовместна при $\lambda_0 > 0$; при этом $\lambda_0 = \min\limits_{x=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})} \max\limits_i (\alpha_{i1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{i\,n-1}\xi_{n-1} - \alpha_{in})$. Для совместной системы (1) $|\lambda_0|$ называется устойчивостью ее разрешимости, для несовместной системы (1) $\lambda_0$ — минимальное уклонение.

б) Если гиперплоскость $H_0$, строго отделяющая луч $Л(b_0, b_0 + d)$ от многогранника $M$, имеет уравнение $\xi_1^0\alpha_1 + \xi_2^0\alpha_2 + \ldots + \xi_{n-1}^0\alpha_{n-1} - \alpha_n = \lambda_0$, то $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_{n-1}^0)$ является наилучшим решением системы (1), если $\lambda_0 \leqslant 0$, или является наилучшим приближением, если $\lambda_0 > 0$ ($\max\limits_i (\alpha_{i1}\xi_1^0 + \ldots + \alpha_{i\,n-1}\xi_{n-1}^0 - \alpha_{in}) = \min\limits_{x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})} \max\limits_i (\alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{i\,n-1}\xi_{n-1} - \alpha_{in})$).

Совокупность наилучших решений или приближений системы (1) является, очевидно, выпуклым множеством в $n-1$-мерном пространстве; будем называть его многогранником наилучших решений системы (1), если последняя разрешима, и многогранником наилучших приближений, если система (1) несовместна.

в) Если $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \in A$ — вершины симплекса, внутри которого расположена точка $b_0$, то подсистема

$$\alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{i\,n-1}\xi_{n-1} \leqslant \alpha_{in} \quad (i = i_1, i_2, \ldots, i_k) \tag{2}$$

является чебышевской (системы (1) и (2) либо обе разрешимы, либо обе несовместны; в первом случае они имеют одинаковую устойчивость разрешимости, во втором — равные минимальные уклонения; многогранник наилучших решений или приближений системы (1) содержится в соответствующем многограннике системы (2); никакая собственная подсистема системы (2) не обладает перечисленными свойствами). Многогранник наилучших решений или приближений системы (2) имеет размерность $n-k$, поэтому размерность соответствующего многогранника системы (1) не превосходит $n-k$.

г) Для того чтобы многогранник наилучших решений или приближений системы (1) при любых правых частях был не более чем $r$-мерным, необходимо и достаточно, чтобы в $n-1$-мерном пространстве точек $a' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ $0'$ лежала вне каждого $k-1$-мерного симплекса с вершинами из $A' = \{a_i' = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{i\,n-1})\}_{i=1, 2, \ldots, m}$ при всех $k < n - r$.

2. Если $B \cap M = \Lambda$, то система (1) разрешима при любых правых частях. Если при этом гиперплоскость $H_0$, строго отделяющая ось $B$ от многогранника $M$, имеет уравнение $\xi_1^0\alpha_1 + \xi_2^0\alpha_2 + \ldots + \xi_{n-1}^0\alpha_{n-1} = \beta$, то $x = z + \varepsilon x_0 = (\zeta_1 + \varepsilon\xi_1^0, \ldots, \zeta_{n-1} + \varepsilon\xi_{n-1}^0)$ является решением системы (1) при любых $z$ и $\varepsilon$, удовлетворяющих условиям $\varepsilon\beta \leqslant 0$, $-\varepsilon\beta \geqslant \max\limits_i (\zeta_1\alpha_{i1} + \zeta_2\alpha_{i2} + \ldots + \zeta_{n-1}\alpha_{i\,n-1} - \alpha_{in})$.

Решение задачи о крайней точке. Л. В. Канторович в работе [1] рассмотрел ряд экстремальных задач дискретного характера*, для решения которых им разработан метод разрешающих множителей (индексов). Для решения поставленной задачи используется этот метод. Однако для вычисления разрешающих множителей применен другой процесс последовательных приближений, исползующий идеи метода наискорейшего спуска [2]. Используемый процесс является

* Все эти задачи можно свести к исследуемой.

двойственным аналогом процесса последовательных приближений, примененного С. И. Зуховицким для решения задачи наилучшего (в смысле П. Л. Чебышева) приближения конечной системы несовместных линейных уравнений ([3],[4]).

Перейдем теперь к изучаемой задаче. Всегда существует гиперплоскость $H_0$, строго отделяющая от многогранника $M$ каждый луч $Л(b, b+d) \subset B$, не содержащий точек $M$ (если $B \cap M \neq \Lambda$, то $H_0$ — гиперплоскость, строго отделяющая от $M$ луч $Л(b_0, b_0+d)$; если $B \cap M = \Lambda$, то $H_0$ — гиперплоскость, строго отделяющая $B$ от $M$). Зная уравнение гиперплоскости $H_0$, легко ответить на все вопросы исследуемой задачи. Поэтому гиперплоскость $H_0$ будем называть разрешающей; причем первого рода, если $H_0 \cap B \neq \Lambda$; второго рода, если $H_0 \cap B = \Lambda$.

Гиперплоскость $H_\nu$ назовем допустимой, если она пересекает ось $B$ в точке $b_\nu = c + \lambda_\nu d$, строго отделяет луч $Л(b_\nu, b_\nu + d)$ от многогранника $M$ и $A_\nu = A \cap H_\nu \neq \Lambda$. Допустимую гиперплоскость $H_\nu$ назовем стационарной, если $b_\nu$ содержится в линейном многообразии $L(A_\nu)$, натянутом на множестве $A_\nu$. За расстояние между двумя гиперплоскостями $H_1$ и $H_2$, пересекающими ось $B$, примем евклидову норму разности их направляющих векторов $x_1$ и $x_2$, нормированных так, что $(x_1, d) = (x_2, d) = 1$ ($(x, d)$ — скалярное произведение).

Процесс последовательных приближений начинаем с произвольной допустимой гиперплоскости $H_1$. Если $H_1$ не является стационарной, то существуют гиперплоскости, содержащие множество $A_1$, точку $b_1 - d$ и не содержащие точки $b_1$. Из этих гиперплоскостей выбираем $H_1'$, ближайшую (в определенном выше смысле) к гиперплоскости $H_1$ (такая всегда существует и притом единственная). Далее рассматриваем гиперплоскости $H_{1i}$, содержащие множество $H_1 \cap H_1'$ и точку $a_i \overline{\in} H_1 \cap H_1'$. Если некоторые из этих гиперплоскостей пересекают луч $Л(b_1, b_1 - d)$, то за $H_2$ принимаем ту из них, которая отсекает от этого луча минимальный отрезок; если таких гиперплоскостей не окажется, то за $H_2$ принимаем гиперплоскость, содержащую $H_1 \cap H_1'$ и не пересекающую ось $B$. В первом случае гиперплоскость $H_2$ — допустимая, причем $\lambda_2 < \lambda_1$, $A_2 \supset A_1$; во втором случае $H_2$ — разрешающая (второго рода). Через конечное число таких шагов (не более $n-1$) получим гиперплоскость $H_p$, которая будет либо разрешающей (второго рода), либо стационарной.

После получения стационарной гиперплоскости $H_p$ поступаем следующим образом. Составляем список симплексов максимальной размерности (равной размерности множества $A_p$) с вершинами из $A_p$. Устанавливаем положение точки $b_p$ относительно одного из этих симплексов $S_1$. Если $b_p \overline{\in} S_1$, то найдутся грани $S_1$ (вернее, линейные многообразия, натянутые на этих гранях), строго отделяющие $b_p$ от $S_1$. Из общего списка симплексов вычеркиваем те, которые одной из этих граней отделяются от $b_p$. Если при этом окажутся вычеркнутыми все симплексы, то, по крайней мере, одна из граней $S_1$, например, $S_1'$, строго отделяет $b_p$ от $A_p$. Если не все симплексы окажутся вычеркнутыми, испытываем положение $b_p$ относительно одного из оставшихся симплексов. После конечного числа шагов найдем симплекс $S_t$ такой, что либо $b_p \in S_t$, либо одна из граней $S_t$, например $S_t'$, строго отделяет $b_p$ от $A_p$. В первом случае гиперплоскость $H_p$ — разрешающая (первого рода), во втором $H_p$ не является разрешающей. В последнем случае за $H_p'$ принимаем ближайшую к $H_p$ гиперплоскость, содержащую множество $S_t'$, точку $b_p - d$ и не содержащую

точки $b_p$; далее $H_p$ и $H'_p$ переходим к гиперплоскости $H_{p+1}$ точно так же, как от гиперплоскостей $H_1$ и $H'_1$ мы перешли к $H_2$.

При помощи описанных операций через конечное число шагов мы прийдем к разрешающей гиперплоскости (первого или второго рода). Конечность алгорифма следует из монотонности процесса ($\lambda_\nu$, соответствующие получаемым в процессе стационарным гиперплоскостям $H_\nu$, строго монотонно убывают) и того, что на оси $B$ имеется лишь конечное число точек, принадлежащих стационарным гиперплоскостям.

Некоторые практические указания. За $H_1$ принимаем произвольную гиперплоскость $(x_1,\ a-c)=\lambda_1$, где $(x_1,\ d)=1$, $\lambda_1=\max\limits_i (x_1,\ a_i-c)$. Множество $A_1$ состоит из точек $a_i\in A$, для которых $(x_1,\ a_i-c)=\lambda_1$.

Далее вычисляем $z'_1=a_{i_0}-c+\mu_0 d+\sum\limits_{s=1}^{r}\mu_s(a_{i_s}-a_{i_0})$, где $a_{i_0},\ a_{i_1},\ldots,a_{i_r}$ — вершины некоторого невырожденного симплекса, размерность которого совпадает с размерностью $A_1$ ($a_{i_1}-a_{i_0},\ a_{i_2}-a_{i_0},\ldots,\ a_{i_r}-a_{i_0}$ — линейно независимые, и при этом $a_i-a_{i_0}$ при каждом $a_i\in A_1$ является их линейной комбинацией); $\mu_0,\ \mu_1,\ldots,\mu_r$ удовлетворяют условиям $(z'_1,\ a_{i_s}-a_{i_0})=0$ $(s=1,\ 2,\ldots,\ r)$, $(z'_1,\ d)=0$. Если $\omega=(z'_1,\ a_{i_0}-c)=0$, то гиперплоскость $H_1$ — стационарная; если $\omega\neq 0$, то гиперплоскость $H'_1$ имеет уравнение $(x_1+z_1,\ a-c)=\lambda_1-1$, где $z_1=-\frac{1}{\omega}z'_1$.

Рассматриваемые затем гиперплоскости $H_{1i}$, пересекающие луч $Л$ $(b_1,\ b_1-d)$, имеют уравнение $(x_1+\varepsilon_{1i}z_1,\ a-c)=\lambda_1-\varepsilon_{1i}$, где $\varepsilon_{1i}=-\frac{(x_1,\ a_i-a_{i_0})}{(z_1,\ a_i-a_{i_0})}>0$. Гиперплоскость $H_2$ имеет уравнение $(x_2, a-c)=\lambda_2$, где $x_2=x_1+\varepsilon_1 z_1$, $\lambda_2=\lambda_1-\varepsilon_1$, а $\varepsilon_1$ — минимальное из $\varepsilon_{1i}\geqslant 0$, если такие существуют; $x_2=z_1$, $\lambda_2=-1$, если все (конечные) $\varepsilon_{1i}\leqslant 0$. В последнем случае $H_2$ — разрешающая (второго рода).

Чтобы установить положение точки $b$ относительно невырожденного симплекса $S$ ($b\in L(S)$) с вершинами $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{r+1}$, из матрицы $\|\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ldots,\ \alpha_{in},\ -1\|_{i=1,\ 2,\ldots,\ r+1}$ выбираем некоторый отличный от нуля определитель $\Delta$ порядка $r+1$, содержащий последний столбец матрицы, и вычисляем определители $\Delta_i(b)$, получающиеся из $\Delta$ заменой входящих в него координат точки $a_i$ соответствующими координатами точки $b$. Если $\Delta\cdot\Delta_i(b)\geqslant 0$ при всех $i=1,\ 2,\ldots,\ r+1$, то точка $b\in S$. Если $\Delta\cdot\Delta_i(b)\leqslant 0$, то грань $S'$ с вершинами $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{i-1}\ a_{i+1},\ldots,\ a_{r+1}$ строго отделяет $b$ от $S$. При этом $S'$ разделяет $b$ и $a$ $(a\in L(S))$, если $\Delta_i(b)\cdot\Delta_i(a)\leqslant 0$.

Вычисление $H'_p$ и $H_{p+1}$ мало отличается от вычисления $H'_1$ и $H_2$ (вместо точек $a_{i_1},\ a_{i_2},\ldots,a_{i_r}$ здесь фигурируют вершины $S'_i$).

Поступило
18 XI 1954

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Матем. методы в организации и планировании производства, ЛГУ, 1939. [2] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, **3**, в. 6 (28) (1948). [3] С. И. Зуховицкий, ДАН, **73**, № 4, 561 (1951). [4] С. И. Зуховицкий, Матем. сборн., **33** (75), № 2, 327 (1953).