Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 4

МАТЕМАТИКА

И. П. КУБИЛЮС

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ АДДИТИВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

Числовая функция $f(m)$, определенная для всех целых положительных m, называется аддитивной, если $f(mn)=f(m)+f(n)$ для любой пары взаимно простых m, n. Если, кроме того, $f(p^\alpha)=f(p)$ для всех целых положительных степеней простых чисел p^α, то $f(m)$ называется сильно аддитивной.

В настоящей заметке на основе сочетания некоторых теоретико-вероятностных и арифметических соображений доказывается теорема о распределении значений вещественных сильно аддитивных функций при довольно широких предположениях относительно характера этих функций. Теорема включает в себя как частный случай одну теорему Эрдёша и Каца [1] об аддитивных функциях, значения которых распределены по нормальному закону. Наша теорема охватывает более широкий класс законов распределения. При этом условия того, чтобы значения аддитивной арифметической функции были распределены по нормальному закону, шире условий Эрдёша и Каца.

Заметим, что изучение распределения значений аддитивных функций во многих случаях сводится к изучению распределения значений сильно аддитивных функций.

Ниже m, n означают целые положительные числа, p — простые числа; $N\{\}$ — число, а $P\{\}$ — асимптотическая плотность целых положительных чисел m, удовлетворяющих условиям, указанным в скобках; ω, v — вещественные числа.

Теорема. *Пусть $f(m)$ — сильно аддитивная вещественная арифметическая функция,*

$$A_v=\sum_{p\leqslant v}\frac{f(p)}{p},\quad B_v=\left(\sum_{p\leqslant v}\frac{f^2(p)}{p}\right)^{1/2}.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1°. $B_v\to\infty$ *при* $v\to\infty$.

2°. *Существует положительная неубывающая функция $r(n)$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty}r(n)=\infty,\quad \ln r(n)=o(\ln n),\quad B_{r(n)}=B_n\left\{1+o\left(\left(\ln\frac{\ln n}{\ln r(n)}\right)^{-1}\right)\right\}.$$

3°. *Существует такая неубывающая функция $K(u)$ с вариацией единица, что при всех $u\neq 0$*

$$B_n^{-2}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ f(p)\leqslant B_n u}}\frac{f^2(p)}{p}\to K(u)\quad \textit{при}\quad n\to\infty.$$

Обозначим через $F(\omega)$ функцию распределения, логарифм характеристической функции которой $\ln \varphi(t)$ вычисляется по формуле Колмогорова ([2], стр. 92)

$$\ln \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - itu) \frac{1}{u^2} dK(u).$$

Тогда в точках непрерывности функции $F(\omega)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N\{f(m) < A_n + B_n\omega;\ m \leqslant n\} = F(\omega). \tag{1}$$

Наметим доказательство теоремы.

Введем функции

$$f^{(p)}(m) = \begin{cases} f(p), & \text{если } p \mid m, \\ 0, & \text{если } p \nmid m. \end{cases}$$

Тогда функцию $f(m)$ можно записать в виде

$$f(m) = \sum_p f^{(p)}(m).$$

Нетрудно показать, что функции $f^{(p)}(m)$, рассматриваемые как случайные величины, принимающие значения: $f(p)$ с вероятностью $\frac{1}{p}$ и 0 с вероятностью $1 - \frac{1}{p}$, являются независимыми.

Обозначим через $F_p(x)$ функцию распределения случайной величины $f^{(p)}(m)$,

$$M_p = \frac{f(p)}{p}, \quad C_v = \left(\sum_{p \leqslant v} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{f^2(p)}{p} \right)^{1/2}.$$

После несложного рассуждения находим ($v \to \infty$):

$$C_v^{-2} \sum_{p \leqslant v} \int_{-\infty}^{C_v u} x^2\, dF_p(x + M_p) =$$

$$= C_v^{-2} \sum_{\substack{p \leqslant v \\ \left(1-\frac{1}{p}\right) f(p) < C_v u}} \frac{f^2(p)}{p} + o(1) = B_v^{-2} \sum_{\substack{p \leqslant v \\ f(p) < B_v u}} \frac{f^2(p)}{p} + o(1) \tag{1}$$

и для всех $p \leqslant v$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{C_v^2 + x^2} dF_p(x + M_p) \leqslant \frac{f^2(p)}{p\,(B_v^2 + f^2(p))} = o(1).$$

Отсюда, как нетрудно убедиться, в силу предельной теоремы Б. В. Гнеденко и А. В. Грошева ([2], стр. 162) для нарастающих сумм независимых случайных величин, следует, что в точках непрерывности $F(\omega)$

$$\lim_{v\to\infty} P\{f_v(m) < A_v + C_v\omega\} = F(\omega),$$

где

$$f_v(m) = \sum_{p \leqslant v} f^{(p)}(m),$$

а $F(\omega)$ — указанная в формулировке теоремы функция распределения.

При помощи метода «решета» (ср. [1]) отсюда выводим:

$$N\{f_{r(n)}(m) < A_{r(n)} + C_{r(n)}\omega;\ m \leqslant n\} = nF(\omega) + o(n). \tag{2}$$

Имеем:

$$\sum_{m=1}^{n} |f_{r(n)}(m) - f(m)| \leqslant n \sum_{r(n)<p\leqslant n} \frac{|f(p)|}{p} \leqslant nB_n^{1/2}\,(B_n - B_{r(n)})^{1/2}\left(\ln \frac{\ln n}{\ln r(n)}\right)^{1/2},$$

$$A_n - A_{r(n)} \leqslant B_n^{1/2}(B_n - B_{r(n)})^{1/2}\left(\ln \frac{\ln n}{\ln r(n)}\right)^{1/2}.$$

Это показывает, что при $n > n_0(\varepsilon)$ для всех $m \leqslant n$, за исключением $o(n)$ чисел, из

$$f_{r(n)}(m) < A_{r(n)} + C_{r(n)}(\omega - \varepsilon)$$

следует

$$f(m) < A_n + B_n\omega,$$

и для всех $m \leqslant n$, за исключением $o(n)$ чисел, из последнего неравенства следует

$$f_{r(n)}(m) < A_{r(n)} + C_{r(n)}(\omega + \varepsilon).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &N\{f_{r(n)}(m) < A_{r(n)} + C_{r(n)}(\omega - \varepsilon);\ m \leqslant n\} \leqslant \\ &\leqslant N\{f(m) < A_n + B_n\omega;\ m \leqslant n\} + o(n) \leqslant \\ &\leqslant N\{f_{r(n)}(m) < A_{r(n)} + C_{r(n)}(\omega + \varepsilon);\ m \leqslant n\}. \end{aligned}$$

На основании (2) отсюда следует (1) для всех ω, являющихся точками непрерывности $F(\omega)$. Теорема доказана.

Из нашей теоремы следует, в частности, что вещественная сильно аддитивная арифметическая функция $f(m)$ будет распределена по нормальному закону, если выполнены условия 1°, 2°, 3° теоремы с

$$K(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0, \\ 1 & \text{при } u > 0. \end{cases}$$

Заметим, что последнее условие выполнено, если $\max\limits_{p\leqslant n} |f(p)| = o(B_n)$.

В заключение приведем пример ненормально распределенной функции. Разделим все простые числа на два класса: $\{q\}$ и $\{r\}$. Пусть для любого большого n число простых чисел q, не превосходящих n, равно

$$\frac{n}{\ln n \cdot \ln\ln n}\left(1 + o\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right).$$

Определим сильно аддитивную арифметическую функцию $\psi(m)$, положив

$$\psi(p) = \begin{cases} \ln\ln p, & \text{если } p = q, \\ 0, & \text{если } p = r. \end{cases}$$

Из нашей теоремы следует, что

$$N\{\psi(m) < \omega \ln \ln n;\ m \leqslant n\} = nF(\omega - 1) + o(n),$$

где $F(\omega)$ определяется функцией

$$K(u) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad u \leqslant 0, \\ u^2 & \text{при} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad u \geqslant 1. \end{cases}$$

Физико-технический институт
Академии наук Литовской ССР

Поступило
13 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Erdös, M. Kac, Am. J. Math., 62, 738 (1940). [2] Б. В. Гнеденко А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, 1947.