Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 4

МАТЕМАТИКА

ЛЮБОМИР ИЛИЕВ

ТЕОРЕМА ОБ ОДНОЛИСТНОСТИ КОНЕЧНЫХ СУММ ТРИЖДЫ СИММЕТРИЧНЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 XI 1954)

Обозначим через S_3 класс функций вида

$$f_3(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + a_2^{(3)} z^7 + \ldots, \tag{1}$$

трижды симметричных, однолистных и регулярных в круге $|z|<1$. Если $f_3(z) \in S_3$, то положим:

$$\sigma_n^{(3)}(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + \ldots + a_n^{(3)} z^{3n+1}. \tag{2}$$

При $n \neq 2$ мы установили ([1]) следующую теорему:

Теорема. *Если* $f_3(z) \in S_3$, *то* $\sigma_n^{(3)}(z)$ *однолистна в круге* $|z| < \sqrt[3]{3}/2$. *Константу* $\sqrt[3]{3}/2$ *нельзя заменить большей.*

В настоящем сообщении мы установим эту теорему и для случая $n = 2$, чем она будет вполне доказана.

Согласно методу К. Лёвнера ([2]), для того чтобы установить, что конечная сумма

$$\sigma_2^{(3)}(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + a_2^{(3)} z^7 \tag{3}$$

функции $f_3(z) \in S_3$ однолистна в круге $|z| < \sqrt[3]{3}/2$, достаточно установить это для функций, для которых

$$a_1^{(3)} = -\frac{2}{3}\int_0^\infty k(\tau) e^{-\tau}\, d\tau, \quad a_2^{(3)} = \frac{8}{9}\left(\int_0^\infty k(\tau) e^{-\tau}\, d\tau\right)^2 - \frac{2}{3}\int_0^\infty k^2(\tau) e^{-2\tau}\, d\tau, \tag{4}$$

где $k(\tau)$ обозначает произвольную непрерывную функцию, абсолютная величина которой равна 1 при любом $t \geqslant 0$.

Следуя известным методам (см., например, ([3]), стр. 10, 11), легко показать, что это утверждение будет установлено, если мы докажем, что

$$\operatorname{Re}(1 + 4a_1^{(3)} z^3 + 7a_2^{(3)} z^6) > 0 \tag{5}$$

при $|z| < \sqrt[3]{3}/2$, где $a_1^{(3)}$ и $a_2^{(3)}$ определяются формулами (4).

Для этого достаточно доказать, что минимум левой части (5) на окружности $|z| = \sqrt[3]{3}/2$ положителен. Пусть этот минимум получается при $z = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} e^{i\varphi}$, т. е. пусть:

$$\min_{|z|=\sqrt[3]{3}/2} \operatorname{Re}(1 + 4a_1^{(3)}z^3 + 7a_2^{(3)}z^6) = \operatorname{Re}(1 + {}^3/_2\, a_1^{(3)}e^{3i\varphi} + {}^{63}/_{64}\, a_2^{(3)}e^{6i\varphi}),$$

где

$$\begin{aligned}
{}^3/_2\, a_1^{(3)}e^{3i\varphi} &= -\int_0^\infty k(\tau)\, e^{3i\varphi}e^{-\tau}\, d\tau = \int_0^\infty k_1(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau = x_1 + iy_1,\\
{}^{63}/_{64}\, a_2^{(3)}e^{6i\varphi} &= {}^7/_8 \left(\int_0^\infty k(\tau)\, e^{3i\varphi}e^{-\tau}\, d\tau\right)^2 - {}^{21}/_{32}\int_0^\infty k^2(\tau)\, e^{6i\varphi}e^{-2\tau}\, d\tau =\\
&= {}^7/_8 \left(\int_0^\infty k_1(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau\right)^2 - {}^{21}/_{32}\int_0^\infty k_1^2(\tau)\, e^{-2\tau}\, d\tau = x_2 + iy_2
\end{aligned} \tag{6}$$

и

$$k_1(\tau) = x(\tau) + iy(\tau), \quad x^2(\tau) + y^2(\tau) = 1. \tag{7}$$

Утверждение будет доказано, если докажем, что $1 + x_1 + x_2 > 0$. Из (6) и (7) находим:

$$1 + x_1 + x_2 = 1 + x_1 + {}^7/_8 \operatorname{Re}\left(\int_0^\infty k_1(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau\right)^2 - {}^{21}/_{32} \operatorname{Re}\int_0^\infty k_1^2(\tau)\, e^{-2\tau}\, d\tau =$$

$$= 1 + x_1 + {}^7/_8 (x_1^2 - y_1^2) - {}^{21}/_{32}\int_0^\infty [x^2(\tau) - y^2(\tau)]\, e^{-2\tau}\, d\tau =$$

$$= 1 + x_1 + {}^7/_8\, x_1^2 - {}^7/_8 \left(\operatorname{Im}\int_0^\infty k_1(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau\right)^2 - {}^{21}/_{32}\int_0^\infty [1 - 2y^2(\tau)]\, e^{-2\tau}\, d\tau =$$

$$= {}^{43}/_{64} + x_1 + {}^7/_8\, x_1^2 - {}^7/_8 \left(\int_0^\infty y(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau\right)^2 + {}^{21}/_{16}\int_0^\infty y^2(\tau)\, e^{-2\tau}\, d\tau >$$

$$> 0{,}38 - {}^7/_8\int_0^\infty y^2(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau + {}^{21}/_{16}\int_0^\infty y^2(\tau)\, e^{-2\tau}\, d\tau =$$

$$= 0{,}38 - \int_0^\infty [{}^7/_8\, e^{-\tau} - {}^{21}/_{16}\, e^{-2\tau}]\, y^2(\tau)\, d\tau >$$

$$> 0{,}38 - \int_{\ln {}^3/_2}^\infty ({}^7/_8\, e^{-\tau} - {}^{21}/_{16}\, e^{-2\tau})\, d\tau > 0{,}38 - {}^7/_{24} > 0,$$

что требовалось доказать.

Софийский государственный университет
София, Болгария

Поступило
21 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Илиев, ДАН, 84, 9 (1952). [2] K. Löwner, Math. Ann., 89, 103 (1923). [3] K. Joh, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 3 ser., 19, 1 (1937).

Замечание при корректуре. После того как эта работа была послана в редакцию ДАН СССР, в библиотеке Математического института Болгарской Академии наук был получен № 1 (1954) Acta Mathematica Sinica, содержащий аналогичное решение вопроса, данное Гун Сыном (Kung Sun).