Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. А. КИСЕЛЕВ

РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 XI 1954)

В заметках ([1],[2]) была рассмотрена краевая задача для уравнений (как линеаризированных, так и общих) нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в случае двух пространственных переменных. Предположение о том, что движение плоское, дало возможность свести задачу к определению одной функции.

В настоящей работе мы исследуем линеаризированные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости для случая трех пространственных переменных (предлагаемый метод применим также и в случае плоского движения) и устанавливаем теорему существования и единственности краевой задачи. Этой задаче было посвящено много работ. Основные из них указаны в ([1],[2]). Однако, насколько нам известно, теоремы о существовании и единственности решения задачи в каком-либо определенном классе функций не были доказаны. В работе Одквиста ([3]) рассматриваемая задача сведена при помощи введения тепловых потенциалов специального типа к решению некоторых сингулярных интегральных уравнений, исследование которых не проводится ввиду их сложности. Работа Долидзе ([4]) кажется нам ошибочной.

Наш метод решения основан на некоторых соображениях из функционального анализа и является развитием применительно к данному случаю метода решения краевых нестационарных задач различных типов, данного О. А. Ладыженской в работе ([5]). При этом мы используем следующий результат, полученный нами для стационарной задачи*.

Пусть Ω — ограниченная поверхностно и пространственно односвязная область изменения $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{L}_2(\Omega)$ — пространство вектор-функций $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ с $f_i \in L_2(\Omega)$ и скалярным произведением

$$[\mathbf{f}, \vec{\psi}] = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} f_i \psi_i \, d\Omega.$$

Обозначим через $J_0(\Omega)$ подпространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$, ортогональное всем градиентным векторам. Для любого $\mathbf{f} \in J_0(\Omega)$ однозначно находится такое $\mathbf{u}$ из $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega) \cap \mathbf{W}_2^{(2)}(\Omega')$ ([7]) (Ω' — любая внутренняя подобласть Ω) и гармоническая функция g, что

$$\Delta \mathbf{u} - \operatorname{grad} g = \mathbf{f}; \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad \mathbf{u}|_S = 0. \tag{1}$$

При этом разным $\mathbf{f}$ соответствуют разные $\mathbf{u}$, так что равенства (1) устанавливают взаимно-однозначное соответствие, которое мы обозначим

$$\tilde{\Delta} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{1'}$$

* Здесь мы несколько усиливаем результаты С. Г. Крейна ([6]). В классическом смысле задача решена Одквистом ([3]).

между всеми $\mathbf{f}$ из $J_0(\Omega)$ и некоторым линеалом $D(\tilde{\Delta}) \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$. Для любых $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из $D(\tilde{\Delta})$ справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \tilde{\Delta}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\, dQ = -\int_{\Omega} \sum_{i=1} \mathbf{u}_{x_i} \mathbf{v}_{x_i}\, d\Omega. \tag{2}$$

Если $\mathbf{f}$ имеет вид $\int_a^t \vec{\psi}(x,\tau)\, d\tau$, где $\vec{\psi}(x,t)$ есть элемент $\mathbf{L}_2(\Omega)$, непрерывно зависящий от $t \in [0,l]$, то $\mathbf{u} = \tilde{\Delta}^{-1}\mathbf{f}$ имеет вид $\mathbf{u}(x,t) = \int_a^t \mathbf{v}(x,\tau)\, d\tau$, где $\mathbf{v} = \tilde{\Delta}^{-1}\vec{\psi}$ и непрерывно зависит от t.

Переходим теперь к нестационарной задаче. Обозначим через H пространство всех вектор-функций $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $f_i = f_i(x,t) \in L_2(Q)$, $Q = \Omega \times [0,l]$, со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}, \vec{\varphi}) = \int_Q \sum_{i=1}^{3} f_i \varphi_i\, dQ \equiv \int_Q \mathbf{f} \cdot \vec{\varphi}\, dQ.$$

Из известных результатов ([8], [9]) следует, что H можно разбить на ортогональную сумму двух подпространств J_0 и G, которые получаются замыканием (в норме H) линеалов всех соленоидальных векторов $\mathbf{v}$ $\left(\text{т. е. таких, что } \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0\right)$ с $v_n\big|_F = \sum_{k=1}^{3} v_k \cos(\mathbf{n}, x_k) = 0$, ($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к боковой поверхности F цилиндра) и векторов вида $\mathbf{g} = \operatorname{grad} p$, где p — любая непрерывная функция (x,t), имеющая непрерывные производные по x_k. Итак,

$$H = J_0 \oplus G. \tag{3}$$

Обозначим через P_{J_0} и P_G ортогональные проекторы в подпространства J_0 и G. Мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Для любого* $\mathbf{f} \in H$ *существуют вектор* $\mathbf{u}$ *и функция* p *такие, что*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \tilde{\Delta}\mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f}, \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}\big|_S = 0, \quad \mathbf{u}\big|_{t=0} = 0, \tag{5}$$

причем $\operatorname{grad} p \in G$, *а* $\mathbf{u}$ — *имеет* $\mathbf{u}_t$ *и* $\mathbf{u}_{x_i}$ *из* $\mathbf{L}_2(Q)$, *для почти всех* t $\mathbf{u} \in D(\tilde{\Delta})$ *и* $\tilde{\Delta}\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(Q)$. *Функции* $\mathbf{u}$ *и* $\operatorname{grad} p$ *определяются однозначно.*

Обозначим через $D(A)$ множество векторов $\mathbf{v}$, имеющих вид $\mathbf{v}(x,t) = \int_0^t \vec{\varphi}(x,\tau)\, d\tau$, где $\vec{\varphi}$ для всех t принадлежит $D(\tilde{\Delta})$ и $\vec{\varphi}$ и $\tilde{\Delta}\vec{\varphi}$ как элементы $\mathbf{L}_2(\Omega)$ непрерывно зависят от $t \in [0,l]$. На этом множестве рассмотрим оператор

$$A\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - \Delta\mathbf{v}.$$

Нетрудно видеть, что A на $D(A)$ является положительно-определенным. Действительно, если $\mathbf{v} \in D(A)$, то

$$(A\mathbf{v}, A\mathbf{v}) = \int_Q [(\mathbf{v}_t)^2 + (\tilde{\Delta}\mathbf{v})^2 - 2\mathbf{v}_t \tilde{\Delta}\mathbf{v}]\, dQ =$$

$$= \int_Q \left[(\mathbf{v}_t)^2 + (\tilde{\Delta}\mathbf{v})^2 + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_{x_i}^2)\right] dQ \geqslant \int_Q [(\mathbf{v}_t)^2 + (\tilde{\Delta}\mathbf{v})^2]\, dQ,$$

и потому (см. также равенство (2))

$$\int_Q \left[(\mathbf{v})^2 + (\mathbf{v}_t)^2 + \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{v}_{x_i})^2 + (\tilde{\Delta}\mathbf{v})^2\right] dQ \leqslant C_1 (A\mathbf{v}, A\mathbf{v}), \tag{6}$$

где C_1 — абсолютная постоянная, зависящая лишь от области Q. Замыкание оператора A обозначим через $\bar{A}$. В силу (6) элементы $\mathbf{u}$, принадлежащие $D(\bar{A})$, будут обладать теми свойствами, которые указаны в теореме, а область $R(\bar{A})$ значений оператора $\bar{A}$ будет замкнутым подпространством в H. На $R(\bar{A})$ определен вполне непрерывный оператор $\bar{A}^{-1}$. Для того чтобы доказать существование решения системы уравнений (4) + (5), достаточно установить, что $R(\bar{A}) + G = H$, или, что то же (см. (3)), равенство

$$R(\bar{A}) = J_0. \tag{7}$$

Действительно, если (7) верно, то элементу $P_{J_0}\mathbf{f}$ соответствует элемент $\mathbf{u}$ из $D(\bar{A})$ такой, что $P_{J_0}(\bar{A}\mathbf{u} - \mathbf{f}) = 0$. Но это последнее равенство означает в силу (3), что $\bar{A}\mathbf{u} - \mathbf{f}$ есть элемент из G, т. е. $\bar{A}\mathbf{u} - \mathbf{f} \equiv \mathbf{u}_t - \tilde{\Delta}\mathbf{u} - \mathbf{f} = -\operatorname{grad} p$. Функции $\mathbf{u}$, p и являются решениями системы (4) + (5).

Докажем теперь, что (7) действительно имеет место. Так как $R(\bar{A}) = \overline{R(\bar{A})}$, то вместо (7) достаточно показать, что в J_0 нет элемента $\mathbf{w} \neq 0$, ортогонального к $R(\bar{A})$. Пусть $\mathbf{w} \in J_0$ и ортогонально к $R(\bar{A})$, т. е.

$$\int_Q \mathbf{w}(\mathbf{u}_t - \tilde{\Delta}\mathbf{u})\, dQ = 0 \qquad \text{для всех } \mathbf{u} \in D(\bar{A}). \tag{8}$$

По $\mathbf{w}$ построим вектор $\vec{\psi} = \tilde{\Delta}^{-1} \int_t^t \mathbf{w}(x, \tau)\, d\tau$, причем переменную t рассматриваем здесь как параметр. Из сформулированных выше результатов следует, что такая задача имеет решение и

$$\mathbf{w} = \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\Delta}\vec{\psi}).$$

Положим теперь в (8) $\mathbf{u} = \int_0^t \vec{\psi}(x, \tau)\, d\tau$. Это возможно, ибо $\int_0^t \vec{\psi}\, d\tau \in D(\bar{A})$. Тогда из (8) получим

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\Delta}\vec{\psi})\left(\vec{\psi} - \int_0^t \tilde{\Delta}\vec{\psi}\, d\tau\right) dQ = 0.$$

Поскольку $\vec{\psi}$ и $\vec{\psi}_t \in D(\tilde{\Delta})$ и $\vec{\psi}_{t=l} = 0$, то отсюда следует

$$-\int_Q \tilde{\Delta}\vec{\psi} \cdot \vec{\psi}_t\, dQ + \int_Q \tilde{\Delta}\vec{\psi} \cdot \vec{\psi} dQ \Big|_{t=0} - \int_Q \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\Delta}\vec{\psi})\left(\int_0^t \tilde{\Delta}\vec{\psi}\, d\tau\right) dQ = 0.$$

Интегрирование по частям дает:

$$\int_Q \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{\psi}_t}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} dQ + \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} (\vec{\psi}_{x_i})^2 d\Omega \Big|_{t=0} + \int_Q (\tilde{\Delta}\vec{\psi})^2\, dQ = 0,$$

причем все члены, выделяющиеся на границе Q, равны нулю в силу специального выбора $\vec{\psi}$.

Производя интегрирование по t в первом интеграле и учитывая, что $\vec{\psi}_{x_i}\big|_{t=l}=0$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}(\vec{\psi}_{x_i})^2\Big|_{t=0}d\Omega+\int\limits_{Q}(\tilde{\Delta}\vec{\psi})^2\,dQ=0.$$

Отсюда следует, что

$$0=\tilde{\Delta}\vec{\psi}=\int\limits_{l}^{t}\mathbf{w}\,d\tau,$$

и поэтому $\mathbf{w}\equiv 0$, ч. и т. д.

Итак, равенство (7) установлено и, следовательно, доказано существование решения системы (4) + (5). Легко видеть, что решение рассматриваемой задачи единственно. Действительно, если $\mathbf{f}=0$, то $\operatorname{grad}p=P_G\mathbf{f}=0$ и $A\mathbf{u}=P_{J_0}\mathbf{f}=0$. Кроме того $\mathbf{u}\in D(\bar{\Delta})$, и потому

$$0=\int\limits_{Q}(A\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}\,dQ=\int\limits_{Q}(\mathbf{u}_t-\tilde{\Delta}\mathbf{u})\,\mathbf{u}\,dQ=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\mathbf{u}^2\Big|_{t=l}d\Omega+\int\limits_{Q}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{u}_{x_i}^2\,dQ. \qquad (9)$$

Отсюда легко следует, что $\mathbf{u}\equiv 0$. Теорема доказана.

Предлагаемый метод применим и для случая бесконечной области Ω (надо лишь несколько видоизменить выбор вспомогательного вектора $\vec{\psi}$), а также и для задачи с неоднородным начальным условием.

Данное здесь доказательство теоремы существования нестационарной задачи опирается на возможность получения решения стационарной задачи в классе $W_2^2(\Omega')$ для любого $\mathbf{f}\in J_0(\Omega)$. При этом мы для нестационарной задачи устанавливаем удовлетворение уравнению в сильном смысле. Если же ограничиться доказательством удовлетворения уравнениям (4) + (5) в слабом смысле, который мы сейчас определим, то это мы можем сделать, не прибегая к рассмотрению стационарного случая. Такой способ доказательства теоремы существования является развитием метода, данного в работе ([10]) применительно к параболическим уравнениям.

Мы говорим, что $\mathbf{u}$ и p удовлетворяют уравнениям (4), (5) в слабом смысле, если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_{x_i}\in H$, $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$, $\mathbf{u}|_S=0$, $\operatorname{grad}p=P_G\mathbf{f}$ и для любой вектор-функции $\vec{\Phi}\in\mathbf{W}_2^{(1)}(Q)$ с $\operatorname{div}\vec{\Phi}=0$, $\vec{\Phi}|_S=0$ и $\vec{\Phi}|_{t=l}=0$ вектор-функция $\mathbf{u}$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q}(-\mathbf{u}\vec{\Phi}_t+\operatorname{rot}\mathbf{u}\operatorname{rot}\vec{\Phi})\,dQ=\int\limits_{Q}\mathbf{f}\vec{\Phi}\,dQ.$$

Так определенное обобщенное решение единственно.

Отметим, наконец, что из приведенных здесь рассмотрений нетрудно сформулировать и доказать сходимость (по крайней мере в $\mathbf{W}_2^{(1)}(Q)$) приближенного метода решения стационарной и нестационарной задач, аналогичного методу Галеркина.

Поступило
29 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Киселев, О. А. Ладыженская, ДАН, **95**, № 6 (1954). [2] А. А. Киселев, ДАН, **100**, № 5 (1955). [3] F. K. G. Odqvist, Math. Zs., **32**, H. 3 (1930). [4] Д. Е. Долидзе, Прикладн. матем. и мех., **11**, № 2 (1947). [5] О. А. Ладыженская, ДАН, **97**, № 3 (1954). [6] С. Г. Крейн, ДАН, **93**, № 6 (1953). [7] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. [8] С. Л. Соболев, ДАН, **81**, № 6 (1951). [9] H. Weyl, Duke Math. J., **7** (1940). [10] М. И. Вишик, ДАН, **97**, № 2 (1954).