Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 4

МАТЕМАТИКА

В. М. ГЛУШКОВ

ТОЧНЫЕ ТРЕУГОЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ *Z*-АЛГЕБР ЛИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 24 XI 1954)

В силу известной теоремы Биркгофа — Витта, произвольная алгебра Ли над любым полем F допускает хотя бы одно точное линейное представление над тем же самым полем. Биркгофу [1] принадлежит также уточнение этой общей теоремы для случая нильпотентных алгебр Ли конечного ранга. В этом случае матрицы точного линейного представления алгебры Ли могут быть выбраны, во-первых, конечномерными, а во-вторых, собственно треугольными [1]. Легко заметить, что рассуждения Биркгофа оказываются достаточными для того, чтобы установить существование точных собственно треугольных линейных представлений у произвольных нильпотентных алгебр Ли. (Разумеется, для алгебр бесконечного ранга такие представления обязательно бесконечномерны.)

В настоящей заметке показано, что точные собственно треугольные линейные представления алгебр Ли существуют при предположениях значительно более общих, чем нильпотентность алгебры. Этот факт устанавливается при помощи дальнейшего развития метода, примененного Биркгофом в уже упоминавшейся выше работе [1].

Основную роль в дальнейшем играет понятие центральной системы для алгебр Ли, вводимое по аналогии с соответствующим понятием для групп ([2], стр. 403).

Определение 1. Упорядоченное по включению множество $M = \{A_\alpha\}$ идеалов A_α алгебры Ли A называется центральной системой этой алгебры, если выполняются следующие условия: 1) нулевой идеал и сама алгебра A содержатся в множестве M; 2) множество M содержит все объединения и пересечения входящих в него идеалов; 3) пусть a есть любой ненулевой элемент алгебры A; если A_α есть максимальный идеал системы M, не содержащий a, то $[a, b] \in A_\alpha$ для любого элемента b алгебры A.

Определение 2. Алгебра Ли называется Z-алгеброй Ли, если она обладает хотя бы одной центральной системой.

Пусть теперь A есть произвольная Z-алгебра Ли над каким-либо полем F, $\{A_\alpha;\ \alpha \in M\}$ — некоторая ее центральная система, а $B = \{x_\beta;\ \beta \in N\}$ — ее базис. В обозначающем множестве M введем отношение порядка, считая $\alpha_1 < \alpha_2$ всякий раз, как только $A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}$. Составим всевозможные конечные формальные произведения $x_{\beta_1} x_{\beta_2} \dots x_{\beta_k}$ элементов базиса B и назовем весом произведения $x_{\beta_1} x_{\beta_2} \dots x_{\beta_k}$ элемент α множества M, обладающий следующими свойствами: 1) элемент $x(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k) = [[\dots [x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}], \dots], x_{\gamma_k}]$, где $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ есть произвольная перестановка индексов $\beta_1, \dots, \beta_k$, содержится в идеале A_α для любой такой перестановки; 2) существует такая перестановка $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$ индексов β_i, что элемент $x(\delta_1, \dots, \delta_k)$ не содержится ни в одном из идеалов A_{α_1} при $\alpha_1 < \alpha$.

Ясно, что этими требованиями вес любого формального произведения определен однозначно. Особую роль при этом играет нулевой вес. Мы приписываем нулевой вес $\alpha = 0$ тем формальным произведениям, для которых сложный коммутатор $x(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ содержится в нулевом идеале A_0 алгебры A при любой перестановке $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ индексов β_i. Каждый отдельный элемент x_β базиса B также получает некоторый вес, а именно — индекс наименьшего идеала выбранной центральной системы, содержащего элемент x_β.

Упорядочим произвольным образом множество всех формальных произведений одного и того же веса α. Тогда каждое формальное произведение и, в частности, любой элемент базиса B будет характеризоваться двумя индексами: весом α и «внутривесовым» индексом r_α. Множество пар (α, r_α), упорядоченное лексикографически, обозначим через D, а его элементы — через δ_i. Произведение $x_{\delta_1} x_{\delta_2} \ldots x_{\delta_h}$ элементов базиса B будем называть каноническим, если $\delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant \delta_h$.

Примем эти канонические произведения за базис некоторой алгебры C, считая законом умножения в C формальное перемножение таких произведений с последующим «выпрямлением» (по Биркгофу ([1])) до суммы канонических произведений. Как известно ([1]), такая алгебра будет ассоциативной. Кроме того, в силу определения весов, ясно, что каждое формальное произведение имеет вес, строго меньший, чем вес любого из его сомножителей, если только этот последний вес отличен от нуля. Если же хотя бы один из сомножителей формального произведения имеет вес нуль, то вес самого произведения также равен нулю. Далее, при выпрямлении вес выпрямляемого члена, очевидно, не меняется. Добавочные же члены, получаемые при выпрямлении, будут иметь вес не больший, чем вес основного члена. Отсюда немедленно следует, что всевозможные линейные комбинации формальных произведений веса нуль составляют идеал C_0 алгебры C. Обозначим теперь через S множество всех канонических произведений ненулевого веса. Ясно, что $B \subset S$, а множество $S' = \{C_0 + s;\ s \in S\}$ составляет базис алгебры вычетов $C/C_0 = C'$. Как следует из результатов Биркгофа ([1]), алгебра Ли A имеет в этом случае точное представление в ассоциативной алгебре C'. Упорядочим базис S', считая, что $C_0 + s_1 < C_0 + s_2$ тогда и только тогда, когда $s_1 < s_2$, и присоединим к алгебре C' формальную единицу e', удовлетворяющую соотношению $s' < e'$ для любого $s' \in S'$. Полученная в результате такого присоединения ассоциативная алгебра K обладает линейно упорядоченным базисом $Q = S' \cup \{e'\}$. Имея в виду способ упорядочения, а также сказанное выше относительно веса произведения, получим, что любой отличный от e' элемент базиса Q в регулярном представлении алгебры K имеет собственно треугольную матрицу.

Следовательно, алгебра Ли A имеет точное представление в ассоциативной алгебре собственно треугольных матриц над полем F.

Более точно вид этих матриц описывается следующим образом. Пусть R есть какое-либо упорядоченное множество, подобное множеству Q. Тогда каждая матрица описанного выше представления есть множество $\{a^\alpha_\beta;\ \alpha \in R,\ \beta \in R\}$ элементов a^α_β поля F таких, что при любом фиксированном β лишь конечное число элементов a^α_β отлично от нуля 0 поля F и, кроме того, $a^\alpha_\beta = 0$ при всех $\beta \leqslant \alpha$.

Такие матрицы условимся называть собственно треугольными R-матрицами над полем F, действия с ними производятся по известным правилам ([3], § 6).

Приведенными выше рассуждениями доказано следующее предложение:

Теорема. *Пусть A есть некоторая Z-алгебра Ли над произвольным полем F, M — какая-либо ее центральная система, а N — упорядоченное по включению множество всех тех идеалов из M, для которых в системе M существуют непосредственно предшествующие идеалы. Тогда существует упорядоченное множество R вида $\sum_{B \in N} P_B + P$ такое, что алгебра A допускает точное представление собственно треугольными R-матрицами над полем F. Здесь P означает множество, состоящее из одного элемента, а P_B, вообще говоря, бесконечные множества, упорядоченные произвольным образом.*

Следствие. Если алгебра Ли A над полем F обладает возрастающим центральным рядом, т. е. центральной системой, вполне упорядоченной по возрастанию, то она имеет точное представление посредством собственно треугольных R-матриц над полем F, где R есть некоторое вполне упорядоченное множество.

Заметим, что к числу Z-алгебр Ли относятся все локально-нильпотентные алгебры Ли, т. е. такие алгебры, у которых любое конечное подмножество элементов содержится в нильпотентной подалгебре. Существование центральной системы у произвольной локально-нильпотентной алгебры Ли может быть установлено при помощи общего метода доказательства локальных теорем ([2], стр. 351). Однако более просто провести это доказательство, опираясь на следующее очевидное свойство локально-нильпотентных алгебр Ли:

I. Пусть L есть произвольная локально-нильпотентная алгебра Ли, l — любой ее ненулевой элемент. Тогда идеал алгебры L, порожденный всевозможными коммутаторами $[l, x]$ $(x \in L)$, не содержит l.

Для доказательства существования центральной системы у алгебры L применим трансфинитную индукцию по множеству M всех ненулевых элементов алгебры, которое мы будем предполагать вполне упорядоченным. Отнесем первому элементу a множества M идеал L_a алгебры L, порожденный всевозможными коммутаторами $[a, x]$, $x \in L$. Тогда, ввиду свойства I, $a \overline{\in} L$, вместе с тем ясно, что $[a, x] \in L_a$ для любого $x \in L$. Предположим, что для всех элементов b множества M меньших, чем некоторый элемент c того же множества, построены идеалы L_b алгебры L со свойствами:

II. $b \overline{\in} L_b$, но $[b, x] \in L_b$ для любого $x \in L$ и любого $b < c$.

III. Множество идеалов L_b $(a \leqslant b < c)$ упорядочено по включению.

Пополняем систему идеалов L_b $(b < c)$ всевозможными пересечениями и объединениями ее членов, а также, в случае необходимости, нулевым идеалом и самой алгеброй L. Пусть теперь $L_1 \subset L_2$ — два соседних идеала пополненной системы таких, что $c \in L_2$, но $c \overline{\in} L_1$. Обозначим через L_3 идеал, порожденный всеми коммутаторами $[c, x]$ $(x \in L)$. Тогда очевидно, что $L_3 \subset L_2$ и $c \overline{\in} L_1 + L_3$ (последнее соотношение вытекает из свойства I, примененного к алгебре вычетов L / L_1). Полагая теперь $L_1 + L_3 = L_c$, получим, что для системы идеалов $\{L_b;\ a \leqslant b \leqslant c\}$ удовлетворяются свойства II и III.

Таким образом индуктивно доказано существование множества идеалов $\{L_b;\ b \in M\}$, упорядоченного по включению и такого, что для любого $b \in M$ $b \overline{\in} L_b$, но $[b, x] \in L_b$, каков бы ни был элемент $x \in L$.

Система идеалов $\{L_b;\ b \in M\}$, пополненная всевозможными пересечениями и объединениями ее членов, а также, в случае необходимости, нулевым идеалом и самой алгеброй L, представляет собою, очевидно, центральную систему алгебры L. Тем самым доказано существование центральной системы у произвольной локально-нильпотентной алгебры Ли.

Легко видеть, что приведенное доказательство с соответствующими изменениями в терминологии оказывается пригодным также и для групп.

Поступило
18 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Birkhoff, Ann. of Math., 38, № 2, 526 (1937). [2] А. Г. Курош, Теория групп, М., 1953. [3] В. М. Глушков, Матем. сборн., 30, 79 (1952).