Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 4

*МАТЕМАТИКА*

Г. И. БАСС

# ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VI 1954)*

В настоящей работе мы построим эффективное решение задачи Коши для дифференциально-разностного уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha(t)\frac{\Delta^l u(x,t)}{h^l}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{2}$$

Здесь $\alpha(t)$ — непрерывная комплекснозначная функция; $l>0$ — целое число; $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x)| \leqslant Ce^{\varepsilon|x|\ln(1+|x|)}; \tag{3}$$

$\Delta^l$ — разностный оператор $l$-го порядка; $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+h/2) - \varphi(x-h/2)$.

Заметим, что при $l=2$ и $\alpha(t)=i$, $\alpha(t)=-1$ уравнение (1) является, соответственно, дифференциально-разностным аналогом уравнений Шредингера и обратной теплопроводности.

Уравнение (1) при указанном росте начальных данных имеет единственное решение [1].

1. Рассмотрим случай $l=2r$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha(t)\frac{\Delta^{2r} u(x,t)}{h^{2r}}, \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{5}$$

Истолковывая его как уравнение относительно обобщенной функции [2] $u(x,t)$ и переходя к преобразованиям Фурье, получим

$$\frac{dv(s,t)}{dt} = \alpha(t)\frac{(e^{\pi i s h} - e^{-\pi i s h})^{2r}}{h^{2r}} v(s,t) =$$

$$= \frac{\alpha(t)}{h^{2r}}(e^{2\pi i s h} + e^{-2\pi i s h} - 2)^r v(s,t), \tag{6}$$

$$v(s,0) = v_0(s) = \widetilde{u_0(x)}. \tag{7}$$

Его решение запишется в виде

$$v(s,t) = v_0(s)\exp\left\{\frac{(e^{2\pi i s h} + e^{-2\pi i s h} - 2)^r}{h^{2r}}\int_0^t \alpha(t)\,dt\right\},$$

или

$$v(s,\ t) = v_0(s)\exp\{(e^{2\pi ish} + e^{-2\pi ish} - 2)^r \beta(t, h)\}, \tag{8}$$

где через $\beta = \beta(t,\ h)$ мы обозначили $\frac{1}{h^{2r}}\int\limits_0^t \alpha(t)\,dt$.

Рассмотрим функцию

$$e^{\beta(z+1/z-2)^r} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k A_k(\beta). \tag{9}$$

Коэффициенты ряда Лорана легко подсчитываются путем почленного интегрирования вдоль единичной окружности $\gamma$:

$$A_k(\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \exp\left[\beta\left(z + \frac{1}{z} - 2\right)^r\right] z^{-(k+1)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \exp[\beta(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2)^r]\exp[-i(k+1)\varphi]\, i\exp[i\varphi]\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp\{\beta[2(\cos\varphi - 1)]^r\}\exp[-ik\varphi]\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \exp\left[\beta\left(-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^r\right]\cos k\varphi\,d\varphi.$$

Следовательно, подставляя в (9) $z = e^{2\pi ish}$, получим

$$v(s, t) = v_0(s)\exp[\beta(e^{2\pi ish} + e^{-2\pi ish} - 2)^r] =$$

$$= \frac{v_0(s)}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[2\pi ishk]\int\limits_0^{\pi}\exp\left[\beta\left(-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^r\right]\cos k\varphi\,d\varphi. \tag{10}$$

Поэтому решение исходного уравнения имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(x + kh)\int\limits_0^{\pi}\exp\left[\beta\left(-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^r\right]\cos k\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{u_0(x)}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\exp\left[\beta\left(-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^r\right]d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}[u_0(x + kh) + u_0(x - kh)]\int\limits_0^{\pi}\exp\left[\beta\left(-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^r\right]\cos k\varphi\,d\varphi. \tag{11}$$

При $\alpha(t) = 1$, $\beta = t/h^{2r}$ получим

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(x + kh)\int\limits_0^{\pi}\exp\left[\frac{t}{h^{2r}}\left(-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^r\right]\cos k\varphi\,d\varphi. \tag{12}$$

Этот случай (12) был рассмотрен Л. И. Камыниным ([3]). В ([3]) проверяется правильность указанного решения, но не дается метода его построения.

2. Рассмотрим теперь уравнение (1) при $l = 2s + 1$:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha(t) \frac{\Delta^{2s+1} u(x, t)}{(2h)^{2s+1}} \tag{13}$$

($\Delta^{2s+1} u(x, t)$ — нечетная симметричная разность).

В преобразованиях Фурье оно запишется так:

$$\frac{dv(s, t)}{dt} = \frac{\alpha(t)}{(2h)^{2s+1}} (e^{2\pi i s h} - e^{-2\pi i s h})^{2s+1} v(s, t). \tag{16}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$v(s, t) = v_0(s) \exp\{(e^{2\pi i s h} - e^{-2\pi i s h}) \beta_1(t, h)\}, \tag{15}$$

где $\beta_1 = \beta_1(t, h) = \frac{1}{(2h)^{2s+1}} \int_0^t \alpha(t)\, dt.$

Используем равенство

$$\exp\left[\beta_1 \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2s+1}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k B_k(\beta_1),$$

где

$$B_k(\beta_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{\beta_1 (2i \sin\varphi)^{2s+1} + ik\varphi\}\, d\varphi. \tag{16}$$

Решение исходного уравнения (13) будет

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(x + kh) \int_0^{2\pi} \exp\{\beta_1 (2i \sin\varphi)^{2s+1} - ik\varphi\}\, d\varphi. \tag{17}$$

3. Из формулы (11) вытекает, в частности, что уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha(t) \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2} \tag{18}$$

имеем решение

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(x + kh) I_k\left(\frac{2}{h^2} \int_0^t \alpha(t)\, dt\right) \exp\left(-\frac{2}{h^2} \int_0^t \alpha(t)\, dt\right), \tag{19}$$

где $I_k(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z \cos\varphi} \cos k\varphi\, d\varphi$ — функции Бесселя от чисто мнимого аргумента (4).

Отсюда дифференциально-разностный аналог уравнения Шредингера $\frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\Delta^2 u}{h^2}$ имеет решение

$$u(x, t) = e^{-2it/h^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(x + kh) I_k\left(\frac{2it}{h^2}\right). \tag{20}$$

Уравнение (13) при $s = 0$ будет иметь решение

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(x + kh) J_k\left(\frac{2}{h}\int_0^t \alpha(t)\, dt\right), \tag{21}$$

где $J_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(iz\sin\varphi - ik\varphi)\, d\varphi$ — функции Бесселя [4].

Автор приносит глубокую благодарность проф. Г. Е. Шилову за руководство.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
28 IV 1954

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Л. Гуревич, ДАН, 99, № 6 (1954). [2] И. М. Гельфанд, Г. Е Шилов, Усп. матем. наук, 8, в. 6 (1953). [3] Л. И. Камынин, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, № 2, 3 (1953). [4] Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, 1949.