Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. Г. ЧЕРНЫЙ

КОНДЕНСАЦИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПАРА НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 27 XI 1954)

В настоящей заметке приведено решение задачи о течении в пограничном слое с расположенной внутри него поверхностью разрыва. При этом, в отличие от изученного нами ранее ([1]) случая, будем считать, что поток массы сквозь поверхность разрыва отличен от нуля.

В качестве примера рассмотрим задачу о конденсации движущегося пара на плоской поверхности. При некоторых условиях (см. ([2])) выпадающий на поверхности конденсат образует сплошную пленку жидкости, движущейся под влиянием увлечения ее потоком пара и под влиянием силы тяжести. Ограничимся рассмотрением ламинарных установившихся плоско-параллельных движений. Тогда, пренебрегая действием силы тяжести по сравнению с увлекающим действием пара, систему уравнений, описывающих движение в каждой из областей, отделенных поверхностью конденсации, можно привести к виду (в безразмерных переменных)

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}=0,$$
$$\rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial T}{\partial y}+m^2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{1}$$

Здесь $\mathrm{Pr}=c_p\mu/k$ — число Прандтля, $m^2=V^2/c_pT_0$, V и T_0 — значения скорости и температуры набегающего потока пара, принятые за масштабы измерения величин u и T. Остальные обозначения величин в уравнениях (1) общеприняты ([1]).

Решение во внешней области должно удовлетворять условиям: при $y\to\infty$ $u=1$, $T=1$; решение во внутренней области — условиям: при $y=0$ $u=0$, $v=0$, $T=T_{\text{ст}}$. На поверхности конденсации оба решения должны соединяться условиями

$$\rho_1(u_1\operatorname{tg}\beta-v_1)=\rho_2(u_2\operatorname{tg}\beta-v_2),$$
$$\rho_1(u_1\operatorname{tg}\beta-v_1)u_1+\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1=\rho_2(u_2\operatorname{tg}\beta-v_2)u_2+\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2, \tag{2}$$
$$\rho_1(u_1\operatorname{tg}\beta-v_1)\left(\frac{i_1}{V^2}+\frac{u_1^2}{2}\right)+\left(\mu u\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1+\left(\frac{\mu}{m^2\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1=$$
$$=\rho_2(u_2\operatorname{tg}\beta-v_2)\left(\frac{i_2}{V^2}+\frac{u_2^2}{2}\right)+\left(\mu u\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2+\left(\frac{\mu}{m^2\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_2.$$

8 приведенных условий недостаточно для однозначного решения задачи, так как каждая из двух систем (1) имеет 5-й порядок и форма поверхности разрыва также неизвестна. В качестве 3 дополнительных условий потребуем, чтобы скорость и температура оставались непрерывными на поверхности раздела пара и жидкости и, кроме того, чтобы температура на ней равнялась температуре $T_к$ конденсации пара при данном давлении, т. е. $u_1 = u_2$, $T_1 = T_2 = T_к$. Тогда последние два из соотношений (2) преобразуются к следующей форме:

$$\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_2,$$

$$\rho_1 (u_1 \operatorname{tg} \beta - v_1) \frac{i_2 - i_1}{V^2} + \left(\frac{\mu}{m^2 \operatorname{Pr}} \frac{\partial T}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\mu}{m^2 \operatorname{Pr}} \frac{\partial T}{\partial y}\right)_1 = 0.$$

Полагая $\zeta = \frac{y}{\sqrt{x}}$ и $\omega = \mu \frac{du}{d\zeta}$, приведем систему (1) к виду

$$\frac{d^2\omega}{du^2} + \rho\mu \frac{u}{2\omega} = 0,$$

$$\frac{d^2T}{du^2} + (1 - \operatorname{Pr}) \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{du} \frac{dT}{du} + m^2 \operatorname{Pr} = 0,$$

а граничные условия для определения решения во внешней и внутренней областях — к виду:

$$\begin{gathered} \omega_2'(0) = 0, \qquad T_2(0) = T_{ст}, \\ \omega_1(u^*) = \omega_2(u^*), \quad \omega_1'(u^*) = \omega_2'(u^*), \quad T_1(u^*) = T_2(u^*) = T_к, \\ \omega_1'(u^*) L + \frac{c_{p2}}{c_{p1}} \left(\frac{\omega}{\operatorname{Pr}} \frac{dT}{du}\right)_2 - \left(\frac{\omega}{\operatorname{Pr}} \frac{dT}{du}\right)_1 = 0, \\ \omega_1(1) = 0, \quad T_1(1) = 1. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $L = \frac{i_1 - i_2}{c_{p1} T_\infty}$ есть скрытая теплота конденсации, отнесенная к теплосодержанию пара в бесконечности, u^* — значение скорости на поверхности разрыва.

В отличие от задачи об обтекании пластины с просачиванием жидкости сквозь ее поверхность ([1]), в рассматриваемом примере нахождение функций $\omega(u)$ и величины u^* не может быть произведено независимо от нахождения распределения температуры T. Этот факт физически очевиден, так как в задаче о конденсации пара течение пленки конденсата и, в частности, толщина пленки определяется условиями теплоотвода.

Учитывая граничные условия (3) на стенке (т. е. при $u = 0$) и в бесконечности (т. е. при $u = 1$), представим функции ω и T во внешней области и в пристеночном слое, соответственно, в виде (полагаем $\rho_1\mu_1 = 1$ и обозначим $K = \sqrt{\rho_2\mu_2}$)

$$\omega_1 = \bar{\omega}_C(u),$$

$$T_1 = 1 + B_1 \int_1^u \omega_1^{\operatorname{Pr}_1 - 1} du - (m^2 \operatorname{Pr})_1 \int_1^u \omega_1^{\operatorname{Pr}_1 - 1} \left(\int_1^u \omega_1^{1 - \operatorname{Pr}_1} du\right) du,$$

$$\omega_2 = K\alpha\omega_{\gamma=0}(\alpha^{-2/3}u),$$

$$T_2 = T_{ст} + B_2 \int_0^u \omega_2^{\operatorname{Pr}_2 - 1} du - (m^2 \operatorname{Pr})_2 \int_0^u \omega_2^{\operatorname{Pr}_2 - 1} \left(\int_0^u \omega_2^{1 - \operatorname{Pr}_2} du\right) du.$$

Здесь $\bar{\omega}_C(u)$ и $\omega_\gamma(u)$ — функции, определенные в заметке [1]. Для нахождения 5 величин C, α, u^*, B_1, B_2 служат условия (3) на поверхности конденсации:

$$\bar{\omega}_C(u^*) = K\alpha\omega_{\gamma=0}(\alpha^{-2/3}u^*), \quad \bar{\omega}'_C(u^*) = K\alpha^{1/3}\omega'_{\gamma=0}(\alpha^{-2/3}u),$$

$$1 + B_1\int_1^{u^*}\omega_1^{\mathrm{Pr}_1-1}du - (m^2\,\mathrm{Pr})_1\int_1^{u^*}\omega_1^{\mathrm{Pr}_1-1}\left(\int_1^u\omega_1^{1-\mathrm{Pr}_1}du\right)du = T_к,$$

$$T^c{}_т + B_2\int_0^{u^*}\omega_2^{\mathrm{Pr}_2-1}du - (m^2\,\mathrm{Pr})_2\int_0^{u^*}\omega^{\mathrm{Pr}_2-1}\left(\int_0^u\omega_2^{1-\mathrm{Pr}_2}du\right)du = T_к, \qquad (4)$$

$$\bar{\omega}'_C L + \frac{c_{p2}}{c_{p1}}\frac{\bar{\omega}_C^{\mathrm{Pr}_2}}{\mathrm{Pr}_2}\left[B_2 - (m^2\,\mathrm{Pr})_2\int_0^{u^*}\omega_2^{1-\mathrm{Pr}_2}du\right] =$$

$$= \frac{\bar{\omega}_C^{\mathrm{Pr}_1}}{\mathrm{Pr}_1}\left[B_1 - (m^2\,\mathrm{Pr})_1\int_1^{u^*}\omega_1^{1-\mathrm{Pr}_1}du\right].$$

Пользуясь таблицами функций $\bar{\omega}_C$ и $\omega_{\gamma=0}$, из этой системы для каждой совокупности заданных параметров можно определить α, C, u^*, B_1 и B_2. Проведем выкладки в общем виде, когда скорость потока на поверхности раздела u^* мала и $\mathrm{Pr}_1 = 1$.

При малых значениях аргумента $\omega_\gamma(u) = 1 + u\,\mathrm{tg}\,\gamma - \frac{1}{12}u^3 + \ldots$ Поэтому, используя представление $\bar{\omega}_C(u) = u_0^{-2/3}(\gamma)\,\omega_\gamma(u_0 u)$, при малых значениях u^* примем

$$\omega_{\gamma=0}(u) = 1, \quad \omega'_{\gamma=0}(u) = -{}^1/_4 u^2,$$

$$\bar{\omega}_C(u^*) = u_0^{-2/3}(\gamma), \quad \bar{\omega}'_C(u^*) = u_0^{-1/3}(\gamma)\,\mathrm{tg}\,\gamma.$$

Тогда из соотношений (4) получим для определения u^* и γ условия

$$Ku^* = 2u_0^{-1}(\gamma)\sqrt{-\mathrm{tg}\,\gamma}\,,$$
$$u^*\left[\frac{m_1^2}{2} + \frac{1 - T_к}{1 - u^*} - u_0(\gamma)\,\mathrm{tg}\,\gamma L\right] = \frac{c_{p2}}{c_{p1}}\frac{T_к - T_{ст}}{\mathrm{Pr}_2}. \qquad (5)$$

Необходимые для расчетов значения функции $u_0(\gamma)$ при отрицательных γ даны в табл. 1.

Таблица 1

γ, °	0	—15	—30	—45	—60	—75	—90
u_0	2,09	1,60	1,20	0,83	0,52	0,24	0

Рассмотрим теплоотдачу от пара к пластине. Для среднего значения числа Нуссельта, определенного по разности температур в бесконечности и на стенке, легко получить выражение (Re — число Рейнольдса)

$$\mathrm{Nu} = \frac{2\sqrt{\mathrm{Re}}}{1 - T_{ст}}\frac{\omega_2^{\mathrm{Pr}_2}(0)}{\mu_2}B_2. \qquad (6)$$

В обычных условиях можно пренебречь теплотой, выделяющейся вследствие трения, и теплотой, выделяющейся при охлаждении пере-

гретого пара, по сравнению с теплотой конденсации, т. е. считать, что $m_1^2/2 \ll L$, $1 - T_к \ll L$. Тогда (если γ не мала, т. е. Ku^* не мало) из соотношений (5) найдем

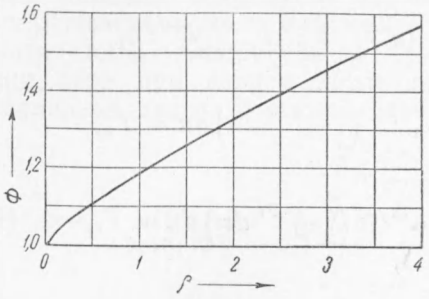


Рис. 1

$$\frac{1}{2(-\operatorname{tg}\gamma)^{3/2}} = \frac{c_{p1}}{c_{p2}} \frac{\mathrm{Pr}_2 L}{T_к - T_{ст}} (\rho_2\mu_2)^{-1/2} = \beta.$$

Для среднего значения числа Нуссельта получим при этом приближенное выражение

$$\mathrm{Nu}_{пр} = \frac{T_к - T_{ст}}{1 - T_{ст}} \sqrt{\mathrm{Re}\frac{\rho_2}{\mu_2}}\,\Phi(\beta).$$

Функция $\Phi(\beta)$ приведена на рис. 1.

Используемая обычно формула Нуссельта для теплоотдачи от движущегося пара [2] может быть приведена в наших обозначениях к виду (при $T_к = 1$)

$$\mathrm{Nu}' = \sqrt{\mathrm{Re}\frac{\rho_2}{\mu_2}\frac{3}{2}\left(\frac{\zeta\sqrt{\mathrm{Re}}}{6}\right)^{1/2}}\beta^{1/2},$$

где ζ — коэффициент трения пара о поверхность конденсата (принимаемый обычно постоянным). Если принять, что $\zeta\frac{\rho_0 V^2}{2} = \frac{1}{l}\int_0^l \left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)^* d\bar{x}$, то $\zeta\sqrt{\mathrm{Re}} = 4\bar{\omega}_C(u^*) = 4u_0^{-3/2}(\gamma)$. Отсюда можно получить

$$\mathrm{Nu}' = \sqrt{\mathrm{Re}\frac{\rho_2}{\mu_2}\frac{3^{3/2}}{2}}\Phi(\beta).$$

Таким образом, приведенные в настоящей заметке соотношения уточняют известные формулы для расчета теплоотдачи от движущегося чистого пара при конденсации его на плоской поверхности. Формула Нуссельта для теплоотдачи получается при некоторых предположениях как предельный случай из соотношений (5) и формулы (6). Из постановки и решения задачи вытекает также, что толщина пленки конденсата растет пропорционально $x^{1/2}$, а не $x^{1/3}$, как это следует из теории Нуссельта [2].

Поступило
17 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Г. Черный, ДАН, **100**, № 5 (1955). [2] С. С. Кутателадзе, Теплопередача при конденсации и кипении, М., 1952.