Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 1

МАТЕМАТИКА

Ю. Л. ШМУЛЬЯН

ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

В настоящей заметке изучается спектр оператора $A-K$, где K — вполне непрерывный оператор. Для этого предварительно доказывается ряд теорем о спектрах операторов, являющихся значениями регулярной операторной функции, если эти значения вполне непрерывны.

Полученные результаты применяются к теории квазиунитарных и ограниченных квазиэрмитовых операторов (1).

1°. В дальнейшем через E обозначается пространство Банаха, через G — область комплексной плоскости.

Лемма 1. *Если $A(\zeta)$ — регулярная в области G функция со значениями из кольца операторов, действующих в E; λ_0 — регулярная точка $A(\zeta_0)$, то существует $\delta>0$ такое, что коль скоро $|\lambda-\lambda_0|<\delta$, $|\zeta-\zeta_0|<\delta$, то λ есть регулярная точка $A(\zeta)$ и $[A(\zeta)-\lambda I]^{-1}$ есть регулярная функция двух переменных λ и ζ.*

Лемма 2 (2). *Если P_1 и P_2 — два проектирующих оператора, L_1 и L_2 — соответствующие подпространства, $\dim(L_1)<\infty$, $\|P_1-P_2\|<1$, то $\dim(L_1)=\dim(L_2)$. При этом, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть базис в L_1, то $P_2x_1, P_2x_2, \ldots, P_2x_n$ есть базис в L_2.*

Как известно (3), если спектр S_A некоторого оператора A есть сумма двух непересекающихся замкнутых частей $S_A=S_1+S_2$, то $E=E_1+E_2$, где E_k инвариантно относительно A, а спектр оператора A_k, индуцированного в E_k, совпадает с S_k. Оператор

$$P_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda,$$

где Γ_k — замкнутый спрямляемый контур, внутри которого лежит S_k, но не лежит S_A-S_k, есть оператор, проектирующий в E_k. Будем называть инвариантное подпространство E_k соответствующим множеству S_k.

Теорема 1. *Пусть $A(\zeta)$ — регулярная в G операторная функция; λ_0 — изолированная точка спектра $A(\zeta_0)$, причем соответствующее инвариантное подпространство n-мерно.*

Тогда, каков бы ни был замкнутый спрямляемый контур Γ в λ-плоскости, состоящий из регулярных точек оператора $A(\zeta_0)$, внутри которого нет других точек спектра $A(\zeta_0)$, кроме λ_0, найдется $\delta>0$ такое, что если $|\zeta-\zeta_0|<\delta$, то:

1. *Γ состоит из регулярных точек $A(\zeta)$.*

2. *Внутри Γ имеется $\leqslant n$ точек спектра $A(\zeta)$, причем инвариантное подпространство L_ζ, соответствующее части спектра $A(\zeta)$, лежащей внутри Γ, n-мерно.*

Доказательство. 1 вытекает из леммы 1.

Наметим доказательство 2. Оператор

$$P(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[A(\zeta) - \lambda I]^{-1}\, d\lambda$$

является при каждом ζ, $|\zeta - \zeta_0| < \delta$, оператором, проектирующим в L_ζ. $P(\zeta)$ является регулярной при $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ функцией, а тогда, согласно лемме 2, $\dim(L_\zeta) = n$ ($|\zeta - \zeta_0| < \delta$).

Основная теорема 2. *Пусть $A(\zeta)$ — регулярная в G операторная функция, принимающая при каждом ζ вполне непрерывные значения; λ_0 — комплексное число $\neq 0$; B_{λ_0} — множество таких $\zeta \in G$, что λ_0 является собственным числом $A(\zeta)$.*

Тогда возможно одно из двух: а) $B_{\lambda_0} = G$; б) B_{λ_0} *не имеет предельных точек в* G.

Доказательство. Пусть $\zeta_0 \in B_{\lambda_0}$, т. е. λ_0 входит в спектр $A(\zeta_0)$. Тогда λ_0 является изолированной точкой спектра $A(\zeta_0)$, а соответствующее инвариантное подпространство L_{ζ_0} конечномерно, $\dim(L_{\zeta_0}) = n < \infty$. Контур Γ и число δ выбираем как в теореме 1. Если $|\zeta - \zeta_0| < \delta$, то $A(\zeta)$ имеет внутри Γ не более n точек спектра, причем соответствующее инвариантное подпространство L_ζ n-мерно. Спектр оператора, индуцированного в L_ζ, совпадает с частью спектра $A(\zeta)$, лежащей внутри Γ. Можно считать, что если $|\zeta - \zeta_0| < \delta$, то $\|P(\zeta) - P(\zeta_0)\| < 1$. Тогда, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — базис в L_{ζ_0}, то $P(\zeta)x_1, P(\zeta)x_2, \ldots, P(\zeta)x_n$ — базис в L_ζ. В силу инвариантности L_ζ относительно $A(\zeta)$

$$A(\zeta)P(\zeta)x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\zeta)P(\zeta)x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Функции $a_{ik}(\zeta)$ регулярны при $|\zeta - \zeta_0| < \delta$. Пусть $P(\zeta, \lambda) = \det[\lambda\delta_{ik} - a_{ik}(\zeta)]_{i,k=1}^{n}$; $P(\zeta, \lambda)$ есть многочлен степени n от λ с коэффициентами, являющимися регулярными при $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ функциями от ζ. Спектр $A(\zeta)$ внутри Γ совпадает с множеством корней $P(\zeta, \lambda)$ как функции от λ.

Пусть $P(\zeta, \lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n + \sigma_1(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + \ldots + \sigma_{n-1}(\zeta)(\lambda - \lambda_0) + \sigma_n(\zeta)$. Так как спектр $A(\zeta_0)$ внутри Γ состоит из точки λ_0, то $P(\zeta_0, \lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n$, таким образом, $\sigma_1(\zeta_0) = \sigma_2(\zeta_0) = \ldots = \sigma_n(\zeta_0) = 0$.

Возможно одно из двух:

а) $\sigma_n(\zeta) \equiv 0$; тогда $P(\zeta, \lambda_0) \equiv 0$, и, следовательно, все точки ζ, $|\zeta - \zeta_0| < \delta$, входят в B_{λ_0};

б) существует $\delta_1 \leqslant \delta$ такое, что если $0 < |\zeta - \zeta_0| < \delta_1$, то $\sigma_n(\zeta) \neq 0$; тогда $\zeta \bar{\in} B_{\lambda_0}$, т. е. ζ_0 — изолированная точка B_{λ_0}.

Применяя лемму о покрытии, получим теорему.

В случае а) можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Если $A(\zeta)$ — регулярная в G операторная функция, принимающая вполне непрерывные значения; $\lambda_0 \neq 0$ — число, являющееся собственным для всех $\zeta \in G$, то существует такое число p, что инвариантное подпространство T_ζ оператора $A(\zeta)$, отвечающее точке λ_0, имеет размерность p для всех $\zeta \in G - F$, где F — изолированное в G множество значений ζ. Для этих исключительных ζ $\dim(T_\zeta) > p$.*

Элементарные делители оператора, индуцированного в T_ζ оператором $A(\zeta)$, совпадают для всех $\zeta \in G - F$.

2°. Полученные выше результаты применяются к изучению спектра оператора $A - K$ на множестве регулярных точек A, где K — вполне непрерывный оператор.

Лемма 3 ([6]). *Если ζ — регулярная точка A, являющаяся точкой спектра $A-K$, то ζ — собственное число $A-K$, причем множество L_m таких $x\in E$, что*

$$(A-K-\zeta I)^m x=0,$$

конечномерно ($m=1,2,\ldots$).

Теорема 4 ([6]). *Если G — компонента множества регулярных точек A; K — вполне непрерывный оператор, то относительно $A-K$ возможно одно из двух:*

а) *либо все точки являются собственными числами;*

б) *либо в G имеется изолированное множество точек спектра $A-K$, причем каждой такой точке отвечает конечномерное инвариантное подпространство.*

Замечание 1. Случай а) невозможен, если G содержит бесконечно удаленную точку.

Замечание 2. В случае б) каждая точка спектра $A-K$ в G будет полюсом резольвенты $(A-K-\zeta I)^{-1}$ с конечномерной главной частью. Таким образом, $(A-K-\zeta I)^{-1}$ будет мероморфной в G функцией.

Теорема 5. *Пусть G состоит из точек спектра $A-K$. Тогда размерности собственных подпространств совпадают для всех $\zeta\in G$, кроме, быть может, точек изолированного в G множества, где эта размерность повышается.*

3°. Пример 1. Пусть T — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве, удовлетворяющий условиям: 1) $I-T^*T$ есть вполне непрерывный оператор; 2) T допускает представление в виде UA, где U — унитарный, A — эрмитов неотрицательный оператор. Оба эти условия выполнены для квазиунитарных операторов ([1]). Тогда T допускает представление $T=U-K$, где U — унитарный, а K — вполне непрерывный оператор.

На основании леммы 3 и теорем 4 и 5 можно сделать следующие выводы в спектре T.

1. Каждая точка спектра T не на единичной окружности есть собственное число, причем подпространства таких x, что $(T-\zeta I)^m x=0$, конечномерны при каждом $m=1,2,\ldots$

2. Спектр T вне единичной окружности есть множество, предельные точки которого, если они существуют, принадлежат спектру U, т. е., во всяком случае, лежат на единичной окружности.

3. Спектр T внутри единичной окружности: а) либо заполняет всю ее внутренность; б) либо его предельные точки принадлежат спектру U, т. е. лежат на единичной окружности. Если U имеет регулярные точки на единичной окружности, то случай а) невозможен (замечание 1 к теореме 4).

4. Изолированной точке спектра T не на единичной окружности отвечает конечномерное инвариантное подпространство.

5. Если каждая точка ζ, $|\zeta|<1$, есть собственное число T, то существует такое число q, что размерность собственного подпространства, отвечающего собственному числу ζ, равна q для всех ζ, $|\zeta|>1$, кроме, быть может, некоторого множества, не имеющего предельных точек внутри единичного круга, для точек которого эта размерность $>q$.

Пример 2. A — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве. Его можно представить в виде A_1+iA_2, где A_1 и A_2 — эрмитовы операторы. Допустим, что A_2 — вполне непрерывный оператор (в частности, если A_2 — конечномерный оператор, то A будет ограниченным квазиэрмитовым оператором ([4])). Тогда: 1) невещественный спектр A изолирован, он может сгущаться лишь к тем точкам вещественной оси, которые входят в спектр A_1; 2) каждая невещественная точка

спектра A есть собственное число, причем соответствующее инвариантное подпространство конечномерно.

Результаты п. 3° получены иным путем М. С. Лившицем ([4], [5]).

Житомирский государственный
педагогический институт им. Ив. Франко

Поступило
4 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. С. Лившиц, ДАН, 58, № 1 (1947). [2] B. Nagy, Comm. Math. Helv., 19, 347 (1947). [3] F. Riesz, Les Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, 1913. [4] М. С. Лившиц, ДАН, 60, № 1 (1948). [5] М. С. Лившиц, Матем. сборн., 26, 2 (1950). [6] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 7, № 3 (1943).