Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 1

МАТЕМАТИКА

Ф. И. ШМИДОВ

К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

Целью настоящей заметки является установление нового критерия принадлежности данной функции к классу обобщенно абсолютно непрерывных функций в широком смысле.

Однозначная функция одной независимой переменной $y = F(x)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие $M = \varphi(P)$, $P = \varphi^{-1}(M)$ между точками $P = x$ области определения E функции $F(x)$ и соответствующими точками $M = (x, F(x))$ ее графика $B(F; E)$ на плоскости. Обозначим через $S(r, M)$ окружность радиуса r вокруг M. Диаметр, параллельный оси Oy, делит $S(r, M)$ на правую и левую полуокружности, которые обозначим, соответственно, через $S^+(r, M)$ и $S^-(r, M)$.

Определение. Точка $M_0 \subset B(F', E)$ называется точкой положительной плотности (соответственно, правосторонней положительной плотности или левосторонней положительной плотности), если при любом $r > 0$ множество точек P, для которых $\varphi(P)$ входят в $S(r, M_0)$ (соответственно, входят в $S^+(r, M_0)$ или $S^-(r, M_0)$), имеет в точке $P_0 = \varphi^{-1}(M_0)$ положительную нижнюю плотность.

Пусть $F(x)$ — конечная функция, определенная на ограниченном множестве E, и пусть E' обозначает множество тех точек $P = \varphi^{-1}(M)$ из E, для которых $M \subset B(F; E)$ суть точки положительной плотности функции $F(x)$. Тогда имеет место

Теорема 1. *Пусть в каждой точке x множества E', исключая, быть может, точки счетного подмножества E'', функция $F(x)$ имеет по крайней мере одно конечное асимптотическое производное число. Тогда $F(x)$ есть функция обобщенной ограниченной вариации в широком смысле* * *на множестве E'.*

Доказательство. Для всякой точки $M_0 = \varphi(P_0)$, $P_0 \subset E''' = E' - E''$, можно указать такие числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что

$$\frac{\mu\{E_{S(r, M_0)}\}}{r} > \alpha \qquad (1)$$

при всех положительных $r \leqslant \beta$, где $E_{S(r, M_0)}$ обозначает множество точек $P \subset E$, для которых $\varphi(P)$ входят в $S(\beta, M_0)$, причем $P \subset (-r, r)$.

Обозначим через $E'''_{\overline{F}_{ac}^{+}}$ множество тех точек из E''', в каждой из которых $F(x)$ имеет конечное асимптотическое правое верхнее производное число $\overline{F}_{ac}^{+}$, так как для доказательства теоремы достаточно рассмотреть один случай. Прежде всего заметим, что каждая точка

* Определение функции обобщенной ограниченной вариации в широком смысле см. (1), стр. 318—319.

$P \subset E'''_{\overline{F}^{+}_{ac}}$ является точкой как правосторонней положительной плотности, так и левосторонней положительной плотности.

Действительно, мы можем предположить, что в каждой точке множества $E'''_{\overline{F}^{+}_{ac}}$ левое нижнее асимптотическое производное число $\underline{F}_{ac} = -\infty$, так как множество тех точек из $E'''_{\overline{F}^{+}_{ac}}$, в каждой из которых $\underline{F}_{ac} > -\infty$ разлагается в сумму не более чем счетного числа множеств, на каждом из которых $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Из того, что в точке $P_0 \subset E'''_{\overline{F}^{+}_{ac}}$ левое нижнее асимптотическое производное число $\underline{F}_{ac} = -\infty$, следует, что существует угол $\theta > 0$, образованный лучами h и ν, исходящими из точки $M_0 \subset B(F; E)$, $M_0 = \varphi(P_0)$ такой, что

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mu\{E_{\sigma(r, \theta, M_0)}\}}{r} > 0, \tag{2}$$

где $E_{\sigma(r, \theta, M_0)}$ обозначает множество точек $P \subset E$, для которых $\varphi(P)$ входят в сектор $\sigma(r, \theta, M_0)$. Сектор $\sigma(r, \theta, M_0)$ образован радиусом r и углом θ при вершине M_0, причем луч h параллелен оси Oy.

Множество $E_{\sigma(r, \theta, M_0)}$ при любом $r > 0$ имеет положительную меру. Для каждой точки P плотности этого множества можно указать такие числа $a > 0$, $b > 0$, что

$$\frac{\mu\{E \cdot S^{+}(\rho, P)\}}{\rho} > a; \quad \frac{\mu\{E \cdot S^{-}(\rho, P)\}}{\rho} > a \tag{3}$$

при всех положительных $\rho \leqslant b$. Тогда легко видеть, что существуют такие числа $a > 0$ и $b > 0$, что из $E_{\sigma(r, \nu, M_0)}$ можно выделить бесконечную последовательность точек $P_1, P_2, \ldots, P_j, \ldots$, стремящихся к P, таких, что для каждой точки P_j этой последовательности выполняются неравенства:

$$\frac{\mu\{E \cdot S^{+}(\rho, P_j)\}}{\rho} > a; \quad \frac{\mu\{E \cdot S^{-}(\rho, P_j)\}}{\rho} > a \tag{4}$$

при всех положительных $\rho \leqslant b$. Отсюда и заключаем, что каждая точка $P \subset E'''_{\overline{F}^{+}_{ac}}$ является точкой как правосторонней положительной плотности, так и левосторонней положительной плотности. Следовательно, для каждой точки $P_0 \subset E'''_{\overline{F}^{+}_{ac}}$ можно указать такие числа $\alpha^{+} > 0$ и $\beta^{+} > 0$, что

$$\frac{\mu\{E_{S^{+}(r, M_0)}\}}{r} > \alpha^{+} \tag{5}$$

при всех положительных $r \leqslant \beta^{+}$.

α^{+} и β^{+} можно заменить меньшими, но рациональными числами α_1^{+} и β_1^{+}. Тогда для каждой точки $P_0 \subset E'''_{\overline{F}^{+}_{ac}}$ будем иметь

$$\frac{\mu\{E_{S^{+}(r, M_0)}\}}{r} > \alpha_1^{+} \tag{6}$$

при всех положительных $r \leqslant \beta_1^{+}$. Обозначим через $E'''_{\overline{F}^{+}_{ac}, \alpha_1^{+}, \beta_1^{+}}$ множество тех точек из $E'''_{\overline{F}^{+}_{ac}}$, для которых выполняется неравенство (6) при фиксированных рациональных $\alpha_1^{+} > 0$ и $\beta_1^{+} > 0$.

Из того, что в точке $P_0 \subset E^{'''}_{F_{ac}^+}$ имеется конечное асимптотическое правое верхнее производное число функций $F(x)$, следует, что существует угол $\gamma > 0$, образованный лучами h и ξ, исходящими из точки $M_0 \subset B(F; E)$, $M_0 = \varphi(P_0)$, такой, что

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mu\{E_{\sigma(r, \gamma, M_0)}\}}{r} = 0, \tag{7}$$

где $E_{\sigma(r, \gamma, M_0)}$ обозначает множество точек $P \subset E$, для которых $\varphi(P)$ входят в сектор $\sigma(r, \gamma, M_0)$, образованный радиусом r и углом γ при вершине M_0, причем луч h параллелен оси Oy.

Покажем, что существует такой угол $\gamma' < \gamma$, внутри которого не может существовать последовательности точек $M_n = \varphi(P_n)$, $P_n \subset E^{'''}_{F_{ac}^+, \alpha_1^+, \beta_1^+}$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющих точку M_0 своей предельной точкой, т. е. существует такое число $p > 0$, что сектор $\sigma(r, \gamma', M_0)$ свободен от точек $M = \varphi(P)$, $P \subset E^{'''}_{F_{ac}^+, \alpha_1^+, \beta_1^+}$, при всех $r \leqslant p$. Действительно, допустим, что такая последовательность существует. Зададим угол $\delta > 0$ такой, что $\delta < \gamma - \gamma'$, и $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{1 + \sin\delta}{\sin\delta}\right)\varepsilon < \alpha_1^+. \tag{8}$$

Тогда, в силу равенства (7), существует такое положительное $\rho \leqslant \beta_1^+$, что для точки M_0 имеет место неравенство

$$\frac{\mu\{E_{\sigma(r, \gamma, M_0)}\}}{r} < \varepsilon \tag{9}$$

при всех положительных $r \leqslant \rho$. В силу же нашего предположения о наличии бесконечной последовательности $M_n = \varphi(P_n)$, $P_n \subset E^{'''}_{F_{ac}^+, \alpha_1^+, \beta_1^+}$ точек, стремящихся к M_0 внутри угла γ', всегда возможно, при соответствующем уменьшении $r \leqslant \rho$ и при достаточно большом n, образовать окружность $S_n(r_n, M_n)$, целиком лежащую внутри сектора $\sigma(r, 2\delta, M_0)$ и касающуюся как обеих сторон угла 2δ, так и окружности $S(r, M_0)$. Далее в силу неравенства (6) для множества $E_{S_n^+(r_n, M_n)}$ имеет место неравенство

$$\frac{\mu\{E_{S_n^+(r_n, M_n)}\}}{r_n} > \alpha_1^+ \tag{10}$$

и, так как сектор $\sigma(r, \gamma, M_0)$ содержит $S_n^+(r_n, M_n)$, имеем неравенство

$$\frac{\mu\{E_{\sigma(r, \gamma, M_0)}\}}{r_n} > \alpha_1^+, \tag{11}$$

но $r_n = r\frac{\sin\delta}{1 + \sin\delta}$. Подставив в (11), получим

$$\frac{\mu\{E_{\sigma(r, \gamma, M_0)}\}}{r\frac{\sin\delta}{1 + \sin\delta}} > \alpha_1^+. \tag{12}$$

Из (9) и (12) следует, что должно иметь место

$$\left(\frac{1 + \sin\delta}{\sin\delta}\right)\varepsilon > \alpha_1^+. \tag{13}$$

Сравнивая неравенство (13) с неравенством (8), мы заключаем, что неравенства (9) и (12) противоречивы. Тем самым наше утверждение полностью доказано.

Таким образом, в каждой точке $P_0 \subset E'''_{\overline{F}ac, \alpha_1^+, \beta_1^+}$ существует конечное правое верхнее производное число Дини функции $F(x)$, если x стремится к точке P_0 справа по множеству $E'''_{\overline{F}ac, \alpha_1^+, \beta_1^+}$. Известно ([1], стр. 343, теорема (10,8)), что в этом случае на множестве $E'''_{\overline{F}ac, \alpha_1^+, \beta_1^+}$ $F(x)$ есть функция обобщенной ограниченной вариации в широком смысле. Здесь предполагается, что $E'''_{\overline{F}ac, \alpha_1^+, \beta_1^+}$ не содержит точек, изолированных справа относительно $E'''_{\overline{F}ac, \alpha_1^+, \beta_1^+}$, так как известно, что всякое множество содержит не более чем счетное число точек, изолированных по крайней мере с одной стороны ([1], стр. 375). Суммируя по всем рациональным числам $\alpha_1^+ > 0$ и $\beta_1^+ > 0$, мы заключаем, что и на всем множестве $E'''_{\overline{F}ac}$ $F(x)$ есть функция обобщенной ограниченной вариации в широком смысле, что и доказывает теорему.

В частности, имеет место

Теорема 2. *Всякая конечная функция $F(x)$, непрерывная на замкнутом множестве E и имеющая в каждой точке множества E, исключая, быть может, счетное подмножество, по крайней мере, одно конечное асимптотическое производное число, есть функция обобщенной ограниченной вариации в широком смысле на множестве E.*

Теорема 3. *Всякая конечная функция $F(x)$, непрерывная на замкнутом множестве E и имеющая в каждой точке множества E, исключая, быть может, счетное подмножество, по крайней мере, одно конечное асимптотическое производное число, является обобщенно абсолютно непрерывной функцией в широком смысле на E.*

Доказательство. По теореме 2 $F(x)$ является функцией обобщенной ограниченной вариации в широком смысле на E. Кроме того, в силу известной теоремы ([1], стр. 421, теорема (9,7)), $F(x)$ удовлетворяет условию (N) Лузина на E. Следовательно, в силу другой известной теоремы ([1], стр. 328, теорема (6,8)), $F(x)$ есть обобщенно абсолютно непрерывная функция в широком смысле на E.

Из теоремы 3 легко следует

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ — конечная функция, равная в каждой точке сегмента $[a, b]$, за исключением, быть может, точек счетного множества, одному из четырех асимптотических производных чисел непрерывной на $[a, b]$ функции $F(x)$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ в смысле Данжуа — Хинчина, а функция $F(x)$ является неопределенным интегралом Данжуа — Хинчина от функции $f(x)$.*

Доказательство. По теореме 3 $F(x)$ является обобщенно абсолютно непрерывной функцией в широком смысле на $[a, b]$. Кроме того, $F'_{ac}(x) = f(x)$ почти в каждой точке $[a, b]$. Отсюда и следует справедливость теоремы.

В заключение выражаю глубокую благодарность А. Н. Колмогорову за ряд ценных замечаний.

Гомельский государственный педагогический институт им. В. П. Чкалова

Поступило 29 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Сакс, Теория интеграла, М., 1949.