Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 1

*МАТЕМАТИКА*

ХУА ЛО-КЭН

# К ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

## ОБ ОДНОЙ ПОЛНОЙ ОРТОНОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ И КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 XII 1954)*

Начнем с двух алгебраических тождеств. Пусть $n$ — целое число $\geqslant 2$,

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j).$$

Имеем

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1, \ldots, n}_{i_1, \ldots, i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1 - x_{i_1}^2)(1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2) \ldots (1 - x_{i_1}^2 \ldots x_{i_n}^2)} = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (1 - x_i x_j)}; \quad (1)$$

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1, \ldots, n}_{i_1, \ldots, i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1 - x_{i_1} x_{i_2})(1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \ldots (1 - x_{i_1} \ldots x_{i_{2[n/2]}})} =$$

$$= \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (1 - x_i x_j)}, \quad (2)$$

$(i_1, \ldots, i_n)$ пробегает все подстановки $1, 2, \ldots, n$ и $\delta^{1, \ldots, n}_{i_1, \ldots, i_n} = 1$ или $-1$, в зависимости от четности или нечетности подстановки $i_1, \ldots, i_n$.

Эти два тождества имеют следующее значение для теории представлений общих линейных групп.

Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — целые числа, удовлетворяющие условию $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0$. Пусть $A_{f_1, \ldots, f_n}(X)$ — представление общей линейной группы порядка $n$ с сигнатурой $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Порядок представления $A_{f_1, \ldots, f_n}(X)$ мы обозначим через $N(f_1, \ldots, f_n)$. Кроме того, введем обозначения:

$$A^{[m]}(X) = A_{m, 0, \ldots, 0}(X), \quad A^{(m)}(X) = A_{\underbrace{1, \ldots, 1}_{m \text{ раз}}, 0, \ldots, 0}(X).$$

Посредством тождеств (1) и (2) можно разложить представление $(A^{[r]})^{[f]}$ и $(A^{(r)})^{[f]}$ в прямую сумму неприводимых представлений:

$$(A^{[r]})^{[f]} = \sum_{\substack{f_1 + \ldots + f_n = f \\ f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0}} A_{2f_1, 2f_2, \ldots, 2f_n}; \quad (3)$$

$$(A^{(r)})^{[f]} = \sum_{\substack{f_1 + \ldots + f_{[1/2\, n]} = f \\ f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant 0}} A_{f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots, f_{[1/2\, n]}, f_{[1/2\, n]}, \dot{0}}, \quad (4)$$

где $\dot{0} = 0$ для нечетных $n$ и $\dot{0}$ вычеркивается для четных $n$.

Формулы (3) и (4) можно реализовать следующим образом.

Пусть $S$ — симметрическая матрица порядка $n$. Рассмотрим преобразование $T = USU'$, где $U'$ — транспонированная матрица к $U$. Элементы матрицы $S = (s_{ij})$, записанные в порядке $s_{11}, \sqrt{2}s_{12}, \ldots, \sqrt{2}s_{1n}, s_{22}, \sqrt{2}s_{23}, \ldots, \sqrt{2}s_{2n}, s_{33}, \ldots, s_{n-1,\,n-1}, \sqrt{2}s_{n-1,\,n}, s_{nn}$, можно рассматривать как $^1/_2 n(n+1)$-мерный вектор, который обозначим через $s$. Преобразование матрицы $S$ индуцирует преобразование вектора $s$, которое является при установленных выше обозначениях преобразованием $U^{[r]}$, $s^{[f]}$-компоненты которого являются однородными многочленами степени $f$ аргументов $s_{ij}$ и размерность равна $(^1/_2 n(n+1) + f - 1)!\,/\,(f!\,(^1/_2 n(n+1) - 1)!)$.

Тождество (3) означает, что пространство представления $(A^{[r]})^{[f]}$ разлагается на подпространства размерностей $N(2f_1, \ldots, 2f_n)$. Обозначим компоненты подпространства размерности $N(2f_1, \ldots, 2f_n)$ через

$$\Psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S), \quad i = 1, 2, \ldots, N(2f_1, \ldots, 2f_n). \tag{5}$$

Тогда переход от $\Psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S)$ к $\Psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(T)$, отвечающий переходу от $S$ к $T = USU'$, осуществляется линейным преобразованием с матрицей представления $A(2f_1, \ldots, 2f_n)$.

Аналогично, но уже при помощи кососимметрических матриц реализуется формула (4).

Рассмотрим гиперболическое пространство симметрических матриц. Пусть $Z$ — симметрическая матрица с $n$ строками. Матрицы $Z$, удовлетворяющие условию $I - Z\bar{Z} > 0$, образуют гиперболическое пространство $R$ симметрических матриц. При помощи системы (5) получаем ортогональную систему для гиперболического пространства симметрических матриц. Мы опускаем вычисление нормировочных множителей при $\Psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(Z)$ ввиду его громоздкости.

Пусть $C$ — характеристическое многообразие, определенное условием «$Z$ унитарна». Имеют место формула Коши и формула Пуассона для пространства $R$, т. е. выражение для $f(Z)$ в $R$ через ее значения на $C$. Например, имеем

$$f(Z) = (\sqrt{\pi})^{^1/_2 n(n+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(1)\,\Gamma(2)\ldots\Gamma(n)} \int\limits_C \ldots \int \det(I - Z\bar{S})^{-^1/_2 (n+1)} f(S)\,\dot{S},$$

где $\dot{S}$ обозначает инвариантную меру на $C$.

Соответствующая формула для кососимметрических матриц:

$$f(Z) = \frac{1}{c} \int\limits_K \ldots \int (\det(I + Z\bar{K}))^{-^1/_2 (n-1)} f(K)\,\dot{K},$$

где $\dot{K}$ пробегает все кососимметрические матрицы вида $U\Delta U'$ с унитарной матрицей $U$ и

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ -e^{i\theta_1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_2} \\ -e^{i\theta_2} & 0 \end{pmatrix} + \ldots,$$

$$\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \ldots \geqslant \theta_\nu \geqslant 0, \quad \nu = [^1/_2 n],$$

$$c = \frac{2^{(\nu-1)^2}}{\lambda\,((\nu-1)!)^2\,(2\sqrt{\pi})^{^1/_2 n(n-1)}} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(^1/_2 \alpha)},$$

$\lambda = ^1/_2$ для четных $n$,

$\lambda = 2^{-\nu}$ для нечетных $n$.

Поступило
24 XII 1954