Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 1

МАТЕМАТИКА

П. Ф. ФИЛЬЧАКОВ

О МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 1 XII 1954)

1°. Функция

$$z_{n+1} = \frac{a_n (z_n - m_n) - b_n \sqrt{(z_n - m_n)^2 + b_n^2 - a_n^2}}{a_n - b_n} \tag{1}$$

отображает нижнюю полуплоскость z_n с вырезанным полуэллипсом на нижнюю полуплоскость z_{n+1}, причем $z_{n+1}\big|_{z_n=\infty} = z_n - m_n$ (см. рис. 1).

Разделяя в (1) действительные и мнимые части, имеем:

$$x_{n+1} = \frac{a_n}{a_n - b_n}(x_n - m_n) - \frac{b_n}{a_n - b_n}\lambda_n; \quad y_{n+1} = \frac{a_n}{a_n - b_n} y_n - \frac{b_n}{a_n - b_n}\mu_n, \tag{2}$$

где введены обозначения:

$$2M_n = (x_n - m_n)^2 - y^2 + b_n^2 - a_n^2; \quad \lambda_n^2 = \sqrt{M_n^2 + (x_n - m_n)^2 y_n^2} + M_n;$$
$$\mu_n = \frac{(x_n - m_n) y_n}{\lambda_n}. \tag{3}$$

В формуле (3) берем арифметическое значение корня, а знак у λ_n выбираем таким же, какой имеет величина $(x_n - m_n)$.

Воспользовавшись разложением в ряд, из формулы (1) получаем:

$$z_{n+1} = (z_n - m_n) + \frac{C_1}{z_n - m_n} + \frac{C_3}{(z_n - m_n)^3} + \frac{C_5}{(z_n - m_n)^5} + \ldots \left(\left| \frac{b_n^2 - a_n^2}{z_n^2} \right| < 1 \right), \tag{4}$$

где

$$C_1 = \frac{b_n (a_n + b_n)}{2}; \quad C_3 = \frac{a_n^2 - b_n^2}{4} C_1; \quad C_5 = \frac{a_n^2 - b_n^2}{2} C_1; \ldots \tag{5}$$

Для наиболее распространенного случая $|y| < |x|$ из ряда (5) получаем расчетные формулы:

$$x_{n+1} - (x_n - m_n) = \Delta x_n = \frac{C_1}{x_n - m_n} + \frac{C_3 - y_n^2 C_1}{(x_n - m_n)^3} + \ldots;$$

$$y_{n+1} - y_n = \Delta y_n = -\frac{y_n}{x_n - m_n}\left[\Delta x_n + \frac{2C_3}{(x_n - m_n)^3} + \ldots \right]. \tag{6}$$

В частности, при $a_n = b_n$ ряд (4) обрывается на втором члене, а при $a_n = 0$ полуэллипс вырождается в прямолинейный разрез b_n и все формулы также упрощаются.

2°. Будем обозначать отображение, осуществляемое функцией (1), символом $S_n(m_n, a_n, b_n)$. Отметим основные свойства отображения $S_n(m_n, a_n, b_n)$:

а) точки z_n, лежащие на контуре полуэллипса, переходят в точки действительной оси области z_{n+1}, причем

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{a_n}(x_n - m_n) \quad (y_{n+1} = 0); \tag{7}$$

б) для всех точек z_n, расположенных в нижней полуплоскости, имеет место неравенство

$$y_{n+1} \leqslant y_n, \tag{8}$$

которое непосредственно следует из (2).

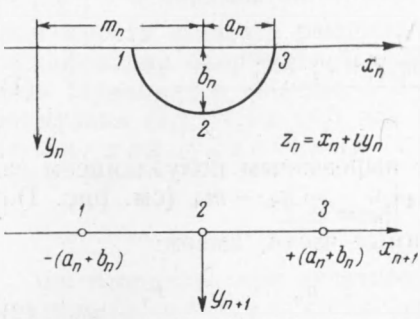


Рис. 1

В силу указанных свойств, воспользовавшись соответствующей последовательностью $\{S_n\}$, можно отобразить любую односвязную однолистную область w на нижнюю полуплоскость z.

Действительно, отобразив соответствующей элементарной функцией w на нижнюю полуплоскость z_1 с рядом вырезов произвольной формы, мы можем последовательно исчерпать эти вырезы при помощи стандартных полуэллипсов (рис. 1) с осями $2a_n$, $2b_n$. В каждом из n шагов по крайней мере две произвольно выбранные точки* $A_n(x_A; y_A)$, $B_n(x_B, y_B)$ будут отображены функцией S_n на действительную ось области z_{n+1}.

Для этого параметры преобразования S_n должны быть выбраны следующим образом:

$$m_n = x_B; \quad a_n = \frac{y_B(x_B - x_A)}{\sqrt{y_B^2 - y_A^2}}; \quad b_n = y_B. \tag{9}$$

Итак, в n-м шаге точки A_n и B_n границы области z_n будут переведены функцией $S_n(m_n, a_n, b_n)$ в точки действительной оси области z_{n+1}, а ординаты остальных точек границы, в силу свойства б), могут только уменьшиться.

В дальнейшем будем говорить, что в n-м шаге осуществлено «спрямление участка $A_n - B_n$».

Выбрав n достаточно большим, осуществим отображение области w на полуплоскость z с заданной степенью точности.

Пример. Рассмотрим наиболее общий вид подземного контура одношпунтовой плотины при бесконечной глубине водопроницаемого грунта (см. рис. 2). Данную область обозначим z_1.

В 1-м шаге спрямим участок *6—7—8*, для чего параметрами преобразования S_1 необходимо взять $m_1 = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. Во 2-м шаге спрямим участок *18—19*. Для этого в качестве точек A_2, B_2 примем точки *19* и *18* области z_2 (рис. 2). Подставив координаты этих точек в формулы (9), получим: $m_2 = 3{,}1609$; $a_2 = 0{,}0014$; $b_2 = 0{,}2847$.

* При выборе точек A_n и B_n необходимо лишь следить за тем, чтобы при отображении S_n граница области z_{n+1} не вышла за пределы нижней полуплоскости. В противном случае вместо преобразования (1) необходимо будет применять в дальнейшем более сложное преобразование, указанное в § 14.1 (случай б) [1].

Выполнив 12 последовательных шагов $S_{12}(m_{12}, a_{12}, b_{12})\, S_{11}(m_{11}, a_{11}, b_{11}) \ldots$ $\ldots S_1(m_1 a_1 b_1)$, отобразим область $w = z_1$ на область z_{13}, которая с точностью, приемлемой для инженерных расчетов, не отличается от полуплоскости. Для получения большей точности необходимо увеличить число шагов и число рассматриваемых точек на границе области $w = z_1$.

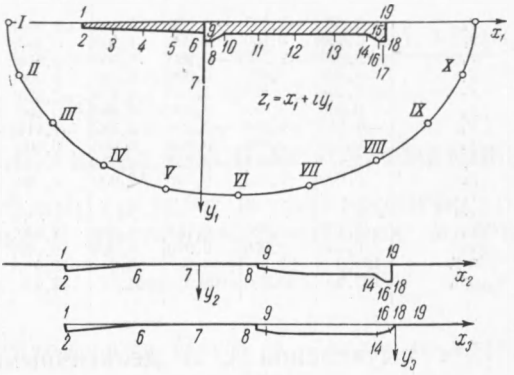


Рис. 2

Параметры последовательных отображений $S_{12}, S_{11}, \ldots$ $\ldots, S_3$ приведены в табл. 1. В табл. 2 приведены координаты угловых точек области $w = z_1$ для первых 4 шагов и для последнего 12-го шага*.

3°. Воспользовавшись полученными результатами, легко определить все фильтрационные характеристики флютбета z_1, известные для плоского флютбета z_{13}. Например, в табл. 2 даны значения приведенного напора h в угловых точках флютбета. Для сравнения указаны также значения $h_{эм}$, полученные электромоделированием. Так как при моделировании возможна абсолютная погрешность порядка 1—2%, то эксперимент был повторен 5 раз, и в качестве истинных значений взято среднее арифметическое.

Таблица 1

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	0,8546	0,3196	0,0004	0,4229	0,0886	0,4022	0,5186	0,0863	0,0068	0,1539
b_n	0,1715	0,1046	0,0888	0,1046	0,0559	0,0555	0,0254	0,0227	0,0128	0,0040
m_n	−0,8820	−1,0751	−3,4730	0,8224	4,5722	−5,0298	3,6396	1,2415	−2,1888	−1,8524

Далее, построив в области плоского флютбета z_{13} гидродинамическую сетку (что легко выполняется), отображаем ее в исходную область $w = z_1$ при помощи последовательных отображений $S_1^{-1}(m_1, a_1, b_1)\, S_2^{-1}(m_2, a_2, b_2) \ldots S_{12}^{-1}(m_{12}, a_{12}, b_{12})$, где $S_n^{-1}(m_n, a_n, b_n)$ есть отображение, обратное отображению $S_n(m_n, a_n, b_n)$:

$$z_n - m_n = \frac{a_n z_{n+1} + b_n \sqrt{z_{n+1}^2 - (a_n + b_n)^2}}{a_n + b_n}. \qquad (10)$$

На рис. 2 построены таким образом 11 точек одной из линий тока для значений $\varphi = 100;\ 90;\ 80; \ldots;\ 0\%$.

Все вычисления для данного примера, выполненные с 4 десятичными знаками (результативные данные в табл. 2 округлены до 3 десятичных знаков) при помощи арифмометра типа ВК-1, потребовали всего 32 рабочих часа.

* Отметим, что в случае полигональных областей излагаемый метод позволяет определить прямым путем с любой заданной степенью точности константы интеграла Кристоффеля — Шварца. В рассматриваемом случае, например, определены 8 линейно независимых констант интеграла Кристоффеля — Шварца, что при применении других методов вычисления этих констант представляет чрезвычайно сложную задачу.

Таблица 2

Точки	1	2	6	7	8	9	10	14	16	18	19
x_1	−2,000	−2,000	−0,000	0,000	+0,000	0,100	0,300	2,700	2,900	3,000	3,000
y_1	0,000	0,100	0,200	1,000	0,300	0,300	0,200	0,200	0,300	0,300	0,000
x_2	−2,236	−2,236	−0,980	0,000	+0,954	0,960	1,026	2,878	3,066	3,161	3,162
y_2	0,000	0,090	0,000	0,000	0,000	0,031	0,058	0,188	0,284	0,285	0,000
x_3	−5,404	−5,404	−4,150	−3,174	−2,225	−2,220	−2,154	−0,381	−0,180	0,000	+0,286
y_3	0,000	0,089	0,000	0,000	0,000	0,031	0,058	0,139	0,150	0,000	0,000
x_4	−4,542	−4,542	−3,296	−2,332	−1,417	−1,412	−1,350	+0,601	0,828	1,034	1,257
y_4	0,000	0,089	0,000	0,000	0,000	0,029	0,053	0,000	0,056	0,000	0,000
x_5	−3,473	−3,473	−2,231	−1,274	−0,430	−0,423	−0,365	+1,690	1,915	2,120	2,342
y_5	0,000	0,089	0,000	0,000	0,000	0,013	0,000	0,000	0,056	0,000	0,000
....	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
....	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
x_{13}	−1,362	−1,300	+0,158	1,018	1,832	1,853	1,912	3,932	4,206	4,424	4,633
y_{13}	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
h, %	100,0	93,5	66,5	56,6	47,9	47,7	47,1	22,2	17,3	12,0	0,00
$h_{эм}$, %	100,0	93,3	66,3	56,0	47,4	47,2	46,5	22,5	17,9	11,9	0,00

При вычислении с 3 десятичными знаками можно пользоваться вычисленной нами (1) таблицей значений функции $\xi + i\eta = \sqrt{1 + (x + iy)^2}$ или номограммой (1, 2).

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
14 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Сенков, П. Ф. Фильчаков, Приближенные методы расчета стационарного движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями, 1952.
[2] П. Ф. Фильчаков, Инж. сборн. АН СССР, 14, 157 (1953).