Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 1

МАТЕМАТИКА

М. Н. ОЛЕВСКИЙ

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ ОБОБЩЕННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 XII 1954)

Теорема 1. *Пусть* $u(x_1, x_2, \ldots, x_m, t; a, b; f)$ *или, короче,* $u(P, t; a, b; f)$ *— решение следующей задачи Коши:*

$$A_P u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{a}{t}\frac{\partial u}{\partial t} + bu, \quad a \geqslant 0\,^*,$$
$$u\Big|_{t=0} = f(P), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0; \tag{1}$$

здесь A_P *— линейный дифференциально-разностный оператор*

$$\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_m=0 \\ l_1+\ldots+l_m\leqslant l}}^{l} \sum_{q_1,\ldots,q_m=0}^{q} A^{l_1,\ldots,l_m}_{q_1,\ldots,q_m}(x_1,\ldots,x_m)\,\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_m} W}{\partial x_1^{l_1},\ldots,\partial x_m^{l_m}},$$

$$W \equiv u\left(x_1 + \alpha^{l_1,\ldots,l_m}_{q_1},\ x_2 + \beta^{l_1,\ldots,l_m}_{q_2},\ \ldots,\ x_m + \mu^{l_1,\ldots,l_m}_{q_m}\right)$$

(все $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ *со значками — постоянные величины с достаточно гладкими коэффициентами), обеспечивающий (при рассматриваемых значениях* a *и* b*) для данной функции* $f(P)$ *надлежащей гладкости существование и единственность решения** задачи* (1).

Тогда имеют место следующие связи:

$$u(P, t; a, b; f) = \int_0^{\pi/2} u(P, t\cos\varphi; a_1, b_1; f)\, K(t, \varphi; a, b, a_1, b_1)\, d\varphi,$$
$$a > a_1 \geqslant 0, \tag{1_1}$$

где

$$K(t, \varphi; a, b, a_1, b_1) =$$
$$= C\bar{I}_{(a-a_1-2)/2}\left(t\sqrt{b_1 - b}\,\sin\varphi\right)(\cos\varphi)^{a_1}(\sin\varphi)^{a-a_1-1},$$

$$C = \frac{2\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a-a_1}{2}\right)}, \qquad \bar{I}_\nu(z) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)\,(z/2)^{2s}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(\nu+s+1)},$$

* Условие $a \geqslant 0$ (общее, $\mathrm{Re}\, a \geqslant 0$) необходимо для единственности решения задачи, поскольку при $a < 0$ функция $t^{1-a}u(P, t; 2-a, b; f)$ является решением уравнения (1), обращающимся при $t = 0$ в нуль вместе со своей производной по t.

** Необходимой (по природе уравнения (1)) гладкости в некоторой области $G(P, t)$, к которой и относятся все утверждения в теоремах 1—3.

и

$$u(P,\ t;\ a,\ b;\ f) = Qt^{1-}\ \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^n [t^{2n+a-1}\ u(P,\ t;\ a+2n,\ b;\ f)]\ *,$$
$$(1+a)\,(3+a)\ldots(2n-1+a)\,Q = 1; \qquad (1_2)$$

формула (1_2) *имеет место в предположении, что гладкость коэффициентов оператора* A_P *и функции* $f(P)$ *обеспечивают n-кратную дифференцируемость* $u(P,\ t;\ a+2n,\ b;\ f)$ *по* t.

Теорема 2. *Пусть* $v(P,\ t;\ a,\ b;\ f)$ *— решение следующей задачи Коши:*

$$A_P v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a\alpha \operatorname{cth} \alpha t \frac{\partial v}{\partial t} + bv, \quad a \geqslant 0,$$
$$v\Big|_{t=0} = f(P), \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0; \qquad (2)$$

A_P, *как и выше, линейный оператор, обеспечивающий существование и единственность решения задачи* (2); a, α *и* b *— постоянные.*

Имеют место следующие связи:

$$v(P,\ t;\ a,\ b;\ f) = \int_0^t v(P,\ \vartheta;\ a_1,\ b_1;\ f)\ L(t,\ \vartheta;\ a,\ a_1)\,d\vartheta, \qquad (2_1)$$

$$a > a_1 \geqslant 0, \quad b_1 = b - {}^1\!/_4\,\alpha^2 (a^2 - a_1^2),$$

где

$$L(t,\vartheta;a,a_1) = 2^{(a-a_1-2)/2}\ C\alpha\,(\operatorname{sh}\alpha t)^{1-a}\,(\operatorname{sh}\alpha\vartheta)^{a_1}\,(\operatorname{ch}\alpha t - \operatorname{ch}\alpha\vartheta)^{(a-a_1-2)/2},$$

$$v(P,t;a,b;f) = Q\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha t}{\alpha}\right)^{1-a}\left(\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^n\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha t}{\alpha}\right)^{2n+a-1} v(P,t;\ a+2n,b_1;f)\right]^{**},$$
$$b_1 = b + \alpha^2 n\,(a+n). \qquad (2_2)$$

Формула (2_2) *имеет место в предположении, что гладкость коэффициентов оператора* A_P *и функции* $f(P)$ *обеспечивают n-кратную дифференцируемость* $v(P,t;\ a+2n,b_1;\ f)$ *по* t.

Теорема 3. *Пусть* $w(P,t;\ f)$ *— решение следующей задачи Коши:*

$$A_P w = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad t > 0,$$
$$w|_{t=0} = f(P), \qquad (3)$$

а $u(P,t;\ a;\ f)$ *— решение задачи* (1) *при* $b = 0$; A_P, *как и выше, линейный оператор, обеспечивающий существование и единственность решения каждой из задач* (3) *и* (1).

Тогда имеет место следующая формула:

$$w(P,t;\ f) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi^a\,u(P,\,2\sqrt{t}\,\xi;\,a;f)\,d\xi. \qquad (3_1)$$

---

* Из (1_2) при $n=1$ с последующим применением (1_1) вытекает следующее (используемое ниже) соотношение:

$$u(P,\ t;\ a,\ b;\ f) = t^{-a}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \xi^a\,J_0\left(\sqrt{(b-b_1)\,(t^2-\xi^2)}\right)u(P,\ \xi;\ a,b_1;\ f)\,d\xi. \qquad (1_3)$$

** Формулы (2_1) и (2_2) при $\alpha \to 0$ обращаются, соответственно, в (1_1) с $b_1 = b$ и (1_2). По поводу условия $a \geqslant 0$ может быть сделано замечание, аналогичное замечанию в сноске на стр. 21.

Доказательство указанных теорем может быть осуществлено непосредственной проверкой. Следует заметить, что они имеют место для любых линейных операторов A_P (не зависящих от t и обеспечивающих существование и единственность решения соответствующих задач), если они перестановочны с интегрированием в (1_1) (соотв. (2_1), (3_1)) и дифференцированием в (1_2) (соотв. (2_2)).

Формула (1_2) имеет место и при $a<0$, но в этом случае она преобразовывает решение $u(P,t;a+2n,b;f)$ в не единственное решение $u(P,t;a,b;f)$; это замечание справедливо и для формулы (2_2). Однако обе эти формулы теряют смысл при $a=-2r-1$, $r=0,1,2,\ldots$ $\ldots,n-1$. В этом случае для задачи (1), например, в предположении надлежащей гладкости функции $f(P)$, имеет место следующая формула преобразования (см. (1_2) при $a=-2r-1$, $n=r$):

$$u(P,t;-2r-1,b;f)=\frac{(-1)^r}{2^r r!}t^{2r+2}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^r[t^{-2}u(P,t;-1,b;f)],$$

$$u(P,t;-1,b;f)=$$

$$=f(P)+t^2\left[2\ln t\,v(P,t;\varphi)-\int_0^1\frac{2v(P,t;\varphi)-(1+\xi)v(P,t\sqrt{\xi};\varphi)}{1-\xi}d\xi\right],\quad (1_4)$$

где

$$v(P,t;\varphi)\equiv u(P,t;3,b;\varphi),\quad 4\varphi(P)\equiv(A_P-b)f(P).$$

Некоторые применения предыдущих теорем

1. Пусть в теореме 1 оператор A будет оператором Лапласа Δ. Учитывая, что в этом случае $u(P,t;m-1,0;f)$ есть среднее значение функции f по сфере с центром в точке P радиуса t, мы в формуле (1_1) при $a_1=m-1$, $b_1=0$ находим решение соответствующей задачи (1) при $a>m-1$. Формулы (1_2) и (1_4) дают решение* этой задачи при $a\leqslant m-1$. (Ср. [1, 2] при $b=0$ и [3] при $b\neq 0$, но $0<a<1$ и $m=1,2$.)

2. Пусть оператор A в теореме 2 будет оператором Δ_2 Бельтрами в пространстве S_m постоянной кривизны $k=-\alpha^2<0$. Примем в (2_2) $a=0$, $m=2n+1$ и $b=b'\equiv-{}^1/_4\alpha^2(m-1)^2$. Учитывая [5], что $v(P,t;m-1,0;f)$ представляет собой среднее значение $M(P,t;f)$ функции f по сфере (в смысле метрики S_m) с центром в точке P радиуса t, мы находим решение уравнения

$$(\Delta_2-b)v=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\qquad (4)$$

при $b=b'$, удовлетворяющее условиям $v|_{t=0}=f(P)$, $\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0$, в форме

$$v(P,t;0,b';f)=\frac{1}{2n-1!!}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha t}{\alpha}\right)^{2n-1}M(P,t;f)\right]^{**}.\qquad (4_1)$$

---

* При тех же требованиях о гладкости функции $f(P)$ для $a\neq-2r-1$, $(r=0,1,\ldots)$, что и в [2], и при меньших требованиях о гладкости функции $f(P)$, чем в [2], для $a=-2r-1$ $(r=0,1,\ldots)$; в последнем случае достаточно, чтобы функция f имела непрерывные производные до порядка $m/2+r+2$ включительно.

** $b=b'$ представляет собой единственное значение b, при котором для уравнения (4) в предположении, что $m=2n+1$, отсутствует диффузия волн (ср. [4] для $m=3$).

Решение этой задачи при четном $m = 2m_1$ получается (из формулы (2_2), если принять в ней $n = m_1$, $a = 0$, $b = b'$, после чего $v\left(P, t; 2m_1, \frac{2m-1}{4}\alpha^2; f\right)$ заменить по формуле (2_1), приняв в ней $a = 2m_1$, $a_1 = 2m_1 - 1$, $4b = (2m-1)\alpha^2$) в форме

$$v(P, t; 0, b'; f) = \frac{2^{(1-m)/2}}{\Gamma(m/2)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{m-2}{2}} \int_0^t \frac{\alpha\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha\theta}{\alpha}\right)^{m-1} M(P, \theta; f)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha t - \operatorname{ch}\alpha\theta}}\, d\theta. \quad (4_2)$$

Формула же (1_3) при $a = 0$, если положить в ней $4b_1 = -\alpha^2(m-1)^2$, дает решение рассматриваемой волновой задачи (4) при произвольном b в предположении, что функция f имеет непрерывные производные до $\left[\frac{m}{2}\right] + 2$ порядка включительно ([6]). Формулы (2_1) и (2_2) дают также возможность записать решение задачи (2) (при рассматриваемой здесь спецификации оператора A) для любых b и $a > 0$.

3. Принимая в теореме 3 $A = \Delta_2 - b'$, $a = 0$ и воспользовавшись формулами (3_1), (4_1) и (4_2), мы можем получить решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве S_m:

$$\Delta_2 w = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad w|_{t=0} = f(P). \quad (5)$$

Так например, при нечетном числе измерений $m = 2n + 1$ искомое решение (при тех же предположениях относительно функции f, что и в евклидовом пространстве E_m) выглядит следующим образом:

$$w(P, t; f) = \frac{(-1)^n}{2n-1!!}\frac{1}{\sqrt{\pi}t} e^{-\alpha^2 n^2 t} \int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sh}\alpha\xi}{\alpha}\right)^{2n} M(P, \xi; f)\left(\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n e^{-\xi^2/4t}\, d\xi; \quad (5_1)$$

при $\alpha \to 0$ формула (5_1) обращается в известный для пространства E_m результат.

4. Если A — оператор умножения на постоянное число λ, то

$$u = \bar{I}_{(a-1)/2}\ (\sqrt{\lambda - b}\, t), \quad v = \bar{J}_{(a-1)/2}\left(\sqrt{\alpha^2\frac{1-a^2}{4} - \lambda + b}, t\right),$$

где $\bar{J}_p(\mu, t) \equiv F\left(p + {}^1/_2 + \delta,\ p + {}^1/_2 - \delta,\ p + 1; -\operatorname{sh}^2\frac{\alpha}{2}t\right)$, F — гипергеометрическая функция, $\delta^2 = \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{\alpha^2}$, и формулы (1) — (3) обращаются в интегральные и рекурентные соотношения для бесселевых и обобщенных бесселевых функций ([7]). Так например, соотношение (1_1) дает так называемый второй интеграл Сонина ([8], стр. 410).

Московский институт механизации и электрификации сельского хозяйства им. В. М. Молотова

Поступило 22 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Weinstein, C. R., **234**, 2584 (1952). [2] J. B. Diaz, H. F. Weinberger, Proc. Am. Math. Soc., **4**, 703 (1953). [3] М. Б. Капилевич, Матем. сборн., **30**, № 1 (1952). [4] И. Я. Яковлев, ДАН, **62**, № 2 (1948). [5] М. Н. Олевский, ДАН, **45**, № 3 (1944) [6] М. Н. Олевский, ДАН, **46**, № 1 (1945); **93**, № 6 (1953). [7] М. Н. Олевский, ДАН, **40**, № 1 (1943). [8] Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, 1949.