Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. Н. КРАСОВСКИЙ

ОБ УСЛОВИЯХ ОБРАЩЕНИЯ ТЕОРЕМ А. М. ЛЯПУНОВА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

Рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где правые части X_i — непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности точки $O(0, 0, \ldots, 0)$ и обращаются в этой точке в нуль.

Теоремы второго метода А. М. Ляпунова (1) дают достаточные условия устойчивости или неустойчивости решения $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1). Метод заключается в построении функции $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей определенным условиям в окрестности точки O.

В работах (2, 3) показано, что теорема А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости для уравнений (1) может быть обращена.

Цель настоящей заметки — указать условия, при которых существуют функции, удовлетворяющие требованиям теорем А. М. Ляпунова о неустойчивости.

Теорема 1. *Для того чтобы в окрестности точки O существовала функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ класса C^1, производная которой*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i \tag{2}$$

в силу уравнений (1) *является знакоопределенной* (1) *функцией, необходимо и достаточно, чтобы существовала окрестность V точки O, не содержащая целиком траекторий системы* (1), *отличных от O.*

При доказательстве достаточности условий теоремы используются результаты работ (2, 3).

Пусть $I(R)$ — внутренность сферы $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2$. Дугой траектории в $\overline{I(R)}$ назовем максимальную связную дугу траектории, расположенную в $\overline{I(R)}$. Дуги в $\overline{I(R)}$ можно разбить на три класса: M_1 — дуги, определенные в $\overline{I(R)}$ при $0 \leqslant t < \infty$; M_2 — дуги, расположенные в $\overline{I(R)}$ при $-\infty < t \leqslant 0$; M_3 — дуги, определенные в $\overline{I(R)}$ при $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, где τ_1, τ_2 — конечные числа. Траектории из M_1 примыкают к точке O при $t \to \infty$, траектории из M_2 примыкают к точке O при $t \to -\infty$.

Множества $M_1 \cup O$ и $M_2 \cup O$ являются замкнутыми. На этих множествах функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ строится методом, указанным в работе ([3]), где построена функция Ляпунова для случая асимптотической устойчивости.

В области $I(R) - \overline{I(R_1)}$, где R_1 — достаточно малое положительное число, можно построить области G_1 и G_2, содержащие точки множеств M_1 и M_2, соответственно, и удовлетворяющие условиям леммы 2.4 из работы ([2]).

На основании этой леммы области G_1 и G_2 обладают сечениями ([2]) S_1 и S_2, являющимися поверхностями уровня функций u_1 и u_2 класса C^1 в соответствующих областях. При помощи сечений S_1 и S_2 функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, построенная на M_1 и M_2, распространяется на точки множества M_3, лежащие внутри $I(R_1)$.

Необходимость условий теоремы доказывается от противного. Пусть существует траектория $f(p, t)$, расположенная целиком внутри V. Тогда ω-предельное множество $f(p, t)$ содержит траекторию $f(q, t)$, устойчивую по Пуассону ([4]). Если $f(p, t) \neq O$, то $\lim |v(f(q, t)) - v(q)| = 0$ при $t \to \infty$, что противоречит монотонности $v(t) = v(f(q, t))$. Аналогичным образом придем к противоречию, полагая, что α-предельное множество $f(p, t)$ содержит устойчивую по Пуассону траекторию, отличную от O. Итак, следует рассмотреть лишь возможность, когда O является одновременно ω- и α-предельной точкой для $f(p, t)$. Однако тогда $\lim v(f(p, t)) = 0$ при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$, что также противоречит монотонности $v(t) = v(f(p, t))$.

Следствием теоремы 1 является обращение первой теоремы А. М. Ляпунова о неустойчивости.

Теорема 2. *Пусть решение* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *уравнений* (1) *неустойчиво. Тогда для существования функции* $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *класса* C^1, *принимающей в произвольной близости точки* O *положительные значения и такой, что производная ее* (2) *является функцией определенно-положительной в окрестности* O, *необходимо и достаточно, чтобы существовала окрестность* V *начала координат* O, *не содержащая целиком траекторий системы* (1), *кроме* O.

Необходимость условий теоремы 2 следует непосредственно из теоремы 1. Докажем достаточность этих условий. На основании теоремы 1 можно утверждать, что в окрестности точки O существует функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ класса C^1, производная которой (2) является определенно-положительной функцией. Функция v не может быть определенно-отрицательной, так как тогда решение $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ было бы асимптотически устойчивым ([1]). Предположим, что v является знакоотрицательной ([1]) функцией. Пусть $v(p) = 0$ при $p \neq O$. Тогда в произвольно малой окрестности p вследствие $dv/dt|_p > 0$ будут точки q, где $v(q) > 0$, т. е. функция v знакоотрицательной быть не может. Противоречие доказывает теорему.

Теорема 2 позволяет выяснить вопрос о грубости свойства неустойчивости. Свойство неустойчивости равновесия, как можно показать на примере, не является, вообще говоря, грубым свойством, т. е. можно указать такую систему уравнений, когда неустойчивость равновесия может уничтожаться произвольно малыми добавками к правым частям уравнений. Однако, если существует окрестность положения равновесия O, не содержащая целиком траекторий (кроме O), то неустойчивость будет грубым свойством.

Теорема 3. *Пусть особая точка* $O(0, 0, \ldots, 0)$ *системы* (1) *является неустойчивой точкой и существует окрестность этой точки, не содержащая целиком траекторий, отличных от* O. *Тогда можно указать непрерывную функцию* $\eta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *положи-*

тельную всюду, кроме точки O, и такую, что при выполнении неравенств

$$|R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)| \leqslant \eta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

точка O будет неустойчивой и для уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t).$$

Доказательство этой теоремы (используя факт существования функции Ляпунова) проводится аналогично доказательству теоремы 5.2 из работы ([2]), где доказана грубость свойства асимптотической устойчивости точки O.

Укажем одно обобщение первой теоремы А. М. Ляпунова о неустойчивости.

Теорема 4. *Пусть существует функция v, принимающая в произвольно малой окрестности точки O неотрицательные значения и такая, что в окрестности O*

$$\frac{dv}{dt} = 0 \text{ на } H; \qquad \frac{dv}{dt} > 0 \text{ вне } H,$$

где H — область в окрестности точки O. Если H не содержит целиком положительных полутраекторий, отличных от O, то решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1) *неустойчиво.*

Примечание. Очевидно, если H определяется уравнением

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

то для выполнения требований теоремы достаточно соблюдения неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} X_i \neq 0 \quad \text{при } F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0.$$

Докажем теорему. Пусть теорема неверна и точка O устойчива. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать точку p, где $v(p) \geqslant 0$ и $f(p, t)$ при всех $t > 0$ лежит внутри сферы $I(\varepsilon)$. Дуга $f(p, t)$ при $t > 0$ не лежит целиком на H, поэтому есть точка $f(p, \tau)$, где $\tau > 0$ и $v(f(p, \tau)) > 0$. Пусть L — ω-предельное множество $f(p, t)$. L не содержит O, так как иначе $\lim v(f(p, t)) = 0$ при $t \to \infty$. Неубывающая ограниченная функция $v(f(p, t))$ имеет предел $v_0 > 0$ при $t \to \infty$. Очевидно, $v(q) = v_0$ при $q \in L$. Имеем $v(f(q, t)) = v_0$ при всех t для $q \in L$. Однако $f(q, t)$ не лежит целиком на H при $t > 0$ и, следовательно, функция $v(f(q, t))$ не может быть постоянной при $t > 0$, так как вне H $dv/dt > 0$. Противоречие доказывает теорему.

Условия обращения теоремы 4 совпадают с условиями обращения первой теоремы А. М. Ляпунова о неустойчивости. При этом можно построить функцию v, производная которой (2) обращается в нуль на произвольном замкнутом множестве в окрестности O.

Рассмотрим вопрос об обращении второй теоремы А. М. Ляпунова о неустойчивости.

Теорема 5. *Для того чтобы решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ уравнений* (1) *было неустойчивым, достаточно* ([1]) *и необходимо, чтобы в окрестности точки O существовала функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*

класса C^1, *принимающая в произвольной близости* O *положительные значения и такая, что*

$$\frac{dv}{dt} = \lambda v + w,$$

где функция w *знакоположительна или тождественно равна нулю, а* λ *— положительная постоянная.*

Следует доказать лишь необходимость условий теоремы. Если точка O неустойчива, то существует число $R > 0$ и последовательность точек $p_k \to O$ при $k \to \infty$ таких, что точки $f(p_k, t_k)$ лежат на сфере $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2$ при $t_k > 0$. Рассмотрим два случая: I. Можно указать число $R_1 > 0$ такое, что $f(p, t) \in I(R)$ при $t < 0$ для $p \in I(R_1)$. II. Нельзя указать числа R_1, удовлетворяющего указанным выше условиям.

В случае I дуги $f(p_k, t)$ при $t < \tau_k$ и $p_k \in I(R_1)$, где $f(p_k, \tau_k)$ лежат вне $I(R)$, можно погрузить в трубчатые окрестности (2) G_n. В области $G = \Sigma(I(R) \cap G_n)$ строится функция v, имеющая в G знакоположительную производную (2). Способ построения v в G подобен методу, указанному в работе (3) для построения v в случае асимптотической устойчивости, с той разницей, что в указанной конструкции (3) вместо расстояния от точки O используется функция $u(p)$ класса C^1 такая, что $u(p) > 0$ при $p \in G$ и $u(p) = 0$ при p вне G (существование функции u нетрудно доказать). При этом можно выбрать u таким образом, чтобы $dv/dt \geqslant v$, что и обеспечивает выполнение (3) внутри G.

В случае II строится последовательность дуг e_n, выходящих обоими концами из сферы $I(R)$ и подходящих произвольно близко к O при $n \to \infty$. В области $G = \Sigma(I(R) \cap G_n)$, где G_n — трубчатые окрестности e_n, строится функция v, удовлетворяющая условию $dv/dt \geqslant v$.

Функция v, построенная в G, в обоих случаях распространяется с сохранением класса на окрестность точки O так, что вне G $v \equiv 0$ и $dv/dt \equiv 0$.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
15 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, М.— Л., 1950. [2] Е. А. Барбашин, Матем. сборн., **29**, в. 2 (1951). [3] J. L. Massera, Ann. of Math., **50**, 3 (1949). [4] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Изд. 2-е, М.— Л., 1949.