Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 1

МАТЕМАТИКА

Г. КАЛЛИАНПУР

ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 I 1955)

1. Проблема нормальной сходимости для сумм зависимых величин изучалась многими авторами, например С. Н. Бернштейном (1) и М. Лев (2). Однако условия применимости у этих авторов содержат условное математическое ожидание, что делает условия трудно проверяемыми. Простая предельная теорема, где нет подобных ограничений на условные математические ожидания, была дана Гоффдингом и Роббинсом (3) для класса «$f(n)$-зависимых» величин. Подобные результаты были получены Дианандa (4) для $f(n)$-зависимых величин, которые: а) стационарны до второго порядка или б) асимптотически стационарны до второго порядка (его доказательство в случае б) содержит не указанное ранее условие). Эти результаты — частные случаи теоремы, доказываемой ниже.

2. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ называются $f(n)$-зависимыми, если системы $(X_1, \ldots, X_r)$ и $(X_s, \ldots, X_n)$ независимы при $s - r > f(n)$ (3). Мы предположим здесь для простоты:

$$f(n) = m \quad (m \text{ — целое число } \geqslant 1).$$

Доказательство нашей теоремы можно, соответственно, изменить так, чтобы охватить и общий случай.

Пусть ν и k — целые под условиями $n = \nu k + r$ $(0 \leqslant r < k)$, и

$$U_i = X_{ik-k+1} + \ldots + X_{ik-m} \quad (i = 1, \ldots, \nu),$$

$$T_n = \sum_{i=1}^{\nu-1} (X_{ik-m+1} + \ldots + X_{ik}) + (X_{\nu k-k+1} + \ldots + X_{\nu k+r}),$$

$$S_n' = k^{-1/2} \sum_{i=1}^{\nu} U_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$s_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} E\,(k^{-1/2} U_i)^2.$$

Обозначим F_i, G_i и G_i^* функции распределений, соответственно, X_i, U_i и $k^{-1/2}U_i$ и H — совместное распределение $(X_{ik-k+1}, \ldots, X_{ik-m})$.

Теорема *A. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность m-зависимых случайных величин таких, что*

$$EX_i = 0, \quad EX_i^2 < C^2 < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} A_{i+p} = A (\neq 0) \quad \textit{равномерно при } i = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где

$$A_i = EX_{i+m}^2 + 2\sum_{j=1}^{m} E(X_{i+m-j}X_{i+m}).$$

Тогда распределение $n^{-1/2}S_n$ *сходится к нормальному закону со средним* 0 *и дисперсией* A, *если только следующее условие типа Линдеберга выполнено:*

$$\text{при каждом } \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon\sqrt{n}} x^2 dF_j(x) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Из условия (2) имеем при $\varepsilon > 0$ и $i = 1, \ldots, \nu$:

$$\left| \frac{1}{k-2m} \sum_{p=1}^{k-2m} A_{ik-k+p} - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{если } k \geqslant k_0(\varepsilon). \tag{4}$$

Начиная с этого места, пусть k — фиксированное целое число, определяемое так:

$$k = k(\varepsilon) = \max\left\{k_0(\varepsilon), \left[\frac{6mA}{\varepsilon}\right] + 1, \left[\frac{3m^2C^2}{\varepsilon}\right] + 1\right\}. \tag{5}$$

После некоторых вычислений легко проверить, что

$$\sum_{i=1}^{\nu} E(U_i^2) = \sum_{i=1}^{\nu} \left\{ E(X_{ik-k+1} + \ldots + X_{ik-k+m})^2 + \sum_{p=1}^{k-2m} A_{ik-k+p} \right\}$$

и что

$$\frac{s_\nu^2}{\nu} = \frac{1}{\nu k} \sum_{i=1}^{\nu} E(X_{ik-k+1} + \ldots + X_{ik-k+m})^2 + \frac{1}{\nu k} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{p=1}^{k-2m} A_{ik-k+p}.$$

Ввиду того, что (4)

$$\left| \frac{k-2m}{\nu k} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{k-2m} \sum_{p=1}^{k-2m} A_{ik-k+p} - A \right| \leqslant \frac{2mA}{k} + \frac{\varepsilon}{3},$$

используя (1), получаем

$$\left| \frac{s_\nu^2}{\nu} - A \right| \leqslant \frac{m^2C^2}{k} + \frac{2mA}{k} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \tag{6}$$

так как k выбрано как в (5). Неравенство (6) верно для $\nu = \left[\frac{n}{k}\right]$, если только n достаточно велико. Далее, так как U_i $(i = 1, \ldots, \nu)$ — независимые величины, имеем

$$L_\nu \equiv \frac{1}{s_\nu^2} \sum_{i=1}^{\nu} \int_{|u|>\delta s_\nu} u^2 dG_i^* \leqslant \frac{1}{(A-\varepsilon)\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \int_{|u|>\delta\sqrt{A-\varepsilon}\sqrt{\nu}} u^2 dG_i^* =$$

$$= \frac{1}{(A-\varepsilon)\nu k} \sum_{i=1}^{\nu} \int_{|u|>\delta'\sqrt{\nu k}} u^2 dG_i \quad (\delta > 0,\ \delta' = \delta\sqrt{A-\varepsilon}). \tag{7}$$

Далее

$$\int\limits_{|u|>\delta' V\overline{\nu k}} u^2 dG_i = \int\limits_{\{|X_{ik-k+1}+\ldots+X_{ik-m}|>\delta' V\overline{\nu k}\}} \ldots \int (X_{ik-k+1}+\ldots+X_{ik-m})^2 dH \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\left\{\max\limits_{1\leqslant p\leqslant k-m}|X_{ik-k+p}|>\frac{\delta' V\overline{\nu k}}{k-m}\right\}} \ldots \int (|X_{ik-k+1}|+\ldots+|X_{ik-m})^2 dH \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{k-m} (k-m)^2 \int\limits_{|x|>\frac{\delta' V\overline{\nu k}}{k-m}} x^2 dF_{ik-k+p},$$

что, при достаточно большом ν, меньше, чем

$$\sum_{p=1}^{k-m} (k-m)^2 \int\limits_{|x|>\frac{\delta'}{k-m}\sqrt{\frac{k}{k+1}}V\overline{n}} x^2 dF_{ik-k+p}.$$

Поэтому из (7) при достаточно большом ν

$$L_\nu \leqslant \frac{(k-m)^2(k+1)}{(A-\varepsilon)k}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|x|>\frac{\delta'}{k-m}\sqrt{\frac{k}{k+1}}V\overline{n}} x^2 dF_i$$

стремится к нулю (при фиксированном k) как n, и, следовательно, $\nu\to\infty$.

Поэтому из теоремы Линдеберга — Феллера получаем

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left(\frac{S'_n}{s_\nu}\leqslant x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{V\overline{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-1/2 t^2} dt. \tag{8}$$

Полагая

$$Y_n = \left(\frac{\nu k}{n}\right)^{1/2}\frac{aS'_n}{s_\nu}, \quad Y'_n = \left(\frac{\nu k}{n}\right)^{1/2}\frac{bS'_n}{s_\nu}, \quad Z_n = n^{1/2}T_n$$

$$(a^2 = A+\varepsilon, \quad b^2 = A-\varepsilon),$$

мы имеем

$$Y'_n + Z_n \leqslant n^{-1/2}S_n \leqslant Y_n + Z_n, \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Y'_n \leqslant x) = \Phi\left(\frac{x}{b}\right). \tag{10}$$

Далее, так как при ε достаточно малом

$$P(|Z_n|>\varepsilon^{1/4}) \leqslant \frac{ET_n^2}{n\sqrt{\varepsilon}} \leqslant \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}\,n}(\nu+k^2)$$

(M — некоторая константа), имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P(|Z_n|>\varepsilon^{1/4}) \leqslant \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}\,k}.$$

Используя первую половину неравенства (9), получаем

$$P(n^{-1/2}S_n \leqslant x) \leqslant P(Y_n' + Z_n \leqslant x) \leqslant$$

$$\leqslant P(Y_n' \leqslant x + \varepsilon^{1/4}) + P(|Z_n| > \varepsilon^{1/4}),$$

откуда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P(n^{-1/2}S_n \leqslant x) \leqslant \Phi\left(\frac{x+\varepsilon^{1/4}}{\sqrt{A-\varepsilon}}\right) + \frac{M}{\sqrt{\varepsilon k}}. \tag{11}$$

Так как ε произвольно, считая $\varepsilon \to 0$ в правой части (11), из выбора k в (5) имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P(n^{-1/2}S_n \leqslant x) \leqslant \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{A}}\right). \tag{12}$$

Аналогично получаем:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} P(n^{-1/2}S_n \leqslant x) \geqslant \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{A}}\right). \tag{13}$$

Теорема доказана.

3. Для вывода результатов Гоффдинга и Роббинса замечаем, что если $E|X_i|^3 \leqslant k < \infty$ для $i = 1, 2, \ldots$, тогда условие (2) нашей теоремы выполнено.

Если величины асимптотически стационарны до второго порядка, т. е. если

$$\lim_{p\to\infty} EX_pX_{i+p} = c_i,$$

и если предположим равномерную сходимость для $i = 0, 1, \ldots$, тогда

$$\lim_{p\to\infty} A_{i+p} = c_0 + 2\sum_{j=1}^{m} c_j = A$$

равномерно для i.

Если $A \neq 0$, условие (3) нашей теоремы выполнено, и теорема А сводится к теореме 4 в [4].

Ясно, что теорему А можно распространить на векторные случайные величины.

Индийский статистический институт
Калькутта, Индия

Поступило
14 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Math. Ann., **97**, 1 (1926). [2] M. Loève, Univ. of California Publications in Statistics, Berkeley, 1950. [3] W. Hoeffding, H. Robbins, Duke Math. J., **15**, 773 (1948). [4] P. H. Diananda, Proc. Cambr. Phil. Soc., **49**, 239 (1953); **50**, 287 (1954).