Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 1

МАТЕМАТИКА

И. Ц. ГОХБЕРГ

О НУЛЯХ И НУЛЬЭЛЕМЕНТАХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

Пусть A — однородный дистрибутивный (линейный) замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве E. Через $\mathfrak{D}(A)$ обозначим область определения оператора A, через $\mathfrak{R}(A)$ — область его значений.

Размерность подпространства решений уравнения $Ax = 0$ обозначим через $\alpha(A)$ и через $\beta(A)$ обозначим размерность фактор-пространства $E/\mathfrak{R}(A)$. Если $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ конечны, то разность $\alpha(A) - \beta(A)$ называется индексом оператора A и обозначается через $\varkappa(A)$.

Для того чтобы оператор A был нормально разрешимым и числа $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ были конечны и равны, необходимо и достаточно, чтобы A можно было представить в виде

$$Ax = Bx + Tx, \quad x \in \mathfrak{D}(A),$$

где линейный замкнутый оператор B имеет ограниченный обратный, а T — вполне непрерывный или конечномерный оператор.

Это утверждение доказывается так же как и в случае ограниченного A [2].

Для того чтобы оператор A был нормально разрешимый и числа $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ были конечны, необходимо и достаточно, чтобы оператор A можно было представить в виде

$$Ax = Dx + Tx, \quad x \in \mathfrak{D}(A),$$

где линейный замкнутый оператор D имеет ограниченный обратный слева и $\beta(D)$ конечно, либо D имеет ограниченный обратный справа и $\alpha(D)$ конечно; T — вполне непрерывный или конечномерный оператор.

Элемент $x \in E$ называется нульэлементом оператора A, соответствующим комплексному числу λ, если существует такое целое положительное число n, что $(A - \lambda I)^n x = 0$, где I — тождественный оператор в E. Нульэлементы оператора A, соответствующие $\lambda = 0$, будем называть просто нульэлементами оператора A.

В дальнейшем, где не будет специально оговорено, будем считать, что A — линейный замкнутый нормально разрешимый оператор и $\alpha(A)$ конечно.

Выражение «A имеет конечное число линейно независимых нульэлементов» означает, что максимальное число линейно независимых нульэлементов A конечно. Установим критерий того, что оператор A имеет конечное число линейно независимых нульэлементов.

Определение. Пусть $\mathfrak{C}$ — некоторое подпространство из E, $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{C}$ и $A(\mathfrak{D}_1) \subseteq \mathfrak{C}$. Оператор $\hat{A}$, определенный на $\mathfrak{C}$ равенством $\hat{A}x = Ax$, $x \in \mathfrak{C}$, будем называть частью оператора A.

Лемма. *Всякая часть $\hat{A}$ оператора A является оператором нормально разрешимым и $\alpha(\hat{A})$ конечно.*

Теорема 1. *Для того чтобы оператор A имел конечное число линейно независимых нульэлементов, необходимо и достаточно, чтобы индекс * любой части оператора A был неположительным.*

Из этой теоремы вытекают:

Следствие 1. *Для того чтобы оператор A имел конечное число линейно независимых нульэлементов, необходимо, чтобы $\varkappa(A) \leqslant 0$.*

Следствие 2. *Если A — вполне непрерывный оператор, то для любого $\lambda \neq 0$ A имеет конечное число линейно независимых нульэлементов, соответствующих λ.*

Это предложение установил Ф. Рисс. В самом деле, любая часть оператора $A - \lambda I$ есть сумма тождественного оператора, умноженного на λ, и вполне непрерывного оператора. Следовательно, индекс любой части оператора $A - \lambda I$ равен нулю.

Теорема 2. *Пусть $\beta(A)$ конечно. Для того чтобы оператор A имел конечное число линейно независимых нульэлементов, необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде суммы двух операторов*

$$Ax = Dx + Tx, \quad x \in \mathfrak{D}(A),$$

из которых T — линейный вполне непрерывный или конечномерный оператор, а оператор D имеет такой ограниченный обратный оператор слева D^{-1}, что $DTD^{-1} = T$.

Следствие. *Пусть $\varkappa(A) = 0$. Тогда необходимым и достаточным условием того, что оператор A имеет конечное число линейно независимых нульэлементов, является представление его в виде*

$$Ax = Bx + Tx, \quad x \in \mathfrak{D}(A),$$

где линейный оператор T вполне непрерывен или конечномерен, а оператор B имеет ограниченный обратный и $BT = TB$.

В самом деле, из предыдущей теоремы следует, что $A = D + T$, $\varkappa(A) = \varkappa(D)$ ([3,4]). Следовательно, D имеет ограниченный обратный. В этом случае, очевидно, условие $DTD^{-1} = T$ может быть заменено условием $DT = TD$.

Последний результат получен ранее М. А. Гольдманом и С. Н. Крачковским ([7]) для ограниченного A. Для алгебраических бесконечномерных пространств (ненормированных) этот результат получен В. А. Андрунакиевичем ([6]).

Приведем два вспомогательных предложения, которые сами по себе не лишены некоторого интереса.

Теорема 3. *Если T — линейный вполне непрерывный оператор, то оператор $A + T$ нормально разрешимый и $\alpha(A + T)$ конечно.*

Теорема 4. *Существует такое положительное число ρ, что для всех линейных ограниченных операторов B, норма которых меньше ρ, оператор $A + B$ нормально разрешимый и $\alpha(A + B) \leqslant \alpha(A)$.*

В случае, когда $\beta(A)$ конечно, последние две теоремы содержатся в ([3,4]).

Перейдем теперь к установлению связи между количеством нульэлементов оператора A и числом линейно независимых решений урав-

---

* Здесь мы считаем индекс отрицательным и в случае, когда $\beta(A)$ бесконечно, а $\alpha(A)$ конечно.

нения $(A-\lambda I)x=0$, где λ находится в некоторой малой окрестности $\lambda=0$.

Все линейно независимые нульэлементы оператора A можно расположить в виде таблицы, состоящей из m бесконечных строк:

$$x_{i1},\ x_{i2},\ \ldots,\ x_{in},\ \ldots,\quad i=1,2,\ldots,m, \tag{1}$$

и $\alpha(A)-m$ конечных строк

$$x_{m+j,1},\ x_{m+j,2},\ \ldots,\ x_{m+j,r_j},\quad j=1,2,\ldots,m. \tag{2}$$

При этом оператор A переводит каждый последующий элемент данной строки в предыдущий и $Ax_{k1}=0$, $k=1,2,\ldots,\alpha(A)$.

Такое представление для ограниченного A конечным $\beta(A)$ получено С. Н. Крачковским в статье ([8]) и названо им каноническим.

Далее допускаем, что E является гильбертовым пространством.

Теорема 5. *Пусть каноническое представление оператора A задано таблицей* (1) *и* (2).

Тогда существует такое положительное число ρ, что:

а) *число бесконечных строк в каноническом представлении нуль-элементов оператора A, соответствующих λ, $|\lambda|<\rho$, равно m;*

б) *для всех λ, $|\lambda|<\rho$, за исключением, может быть, $\lambda=0$, уравнение $(A-\lambda I)x=0$ имеет ровно m линейно независимых решений.*

Следствие 1. *Если оператор A имеет конечное число линейно независимых нульэлементов, то для всех λ, $|\lambda|<\rho$, за исключением, может быть, $\lambda=0$, уравнение $(A-\lambda I)x=0$ имеет единственное нулевое решение, и, значит, эти λ являются точками регулярного типа для A.*

Следствие 2. *Если оператор A имеет бесконечное число линейно независимых нульэлементов, то для всех λ, $|\lambda|<\rho$, уравнение $(A-\lambda I)x=0$ имеет отличные от нуля решения.*

Теорема 5 для случая, когда A ограничен и $\beta(A)$ конечно, доказана С. Н. Крачковским ([8,9]). Метод доказательства теоремы 5, которым мы пользуемся, отличается от метода С. Н. Крачковского. Результаты, полученные в этой теореме, содержат некоторые предложения, установленные нами ранее в ([5]).

Обозначим через $K(A)$ множество всех комплексных чисел, для каждого из которых оператор $A-\lambda I$ нормально разрешим, $\alpha(A-\lambda I)$ конечно.

Из теоремы ([3]) следует, что $K(A)$ является открытым множеством. Следовательно, $K(A)$ представляет собой сумму конечного или счетного числа связных компонент.

Пусть K — некоторая связная компонента из $K(A)$. При помощи теоремы 5 нетрудно доказать следующую теорему ([5]):

Теорема 6. *Число бесконечных строк в каноническом представлении нульэлементов оператора A, соответствующих любому $\lambda\in K$, одно и то же (пусть оно равно m). Уравнение $(A-\lambda I)x=0$ имеет для всех $\lambda\in K$ за исключением, может быть, изолированного множества P, ровно m линейно независимых решений. Для $\lambda\in P$ уравнение $(A-\lambda I)x=0$ имеет более m линейно независимых решений.*

Следствие. *Если $m=0$, то все точки λ, за исключением, может быть, изолированного множества P, являются точками регулярного типа.*

Теорема 5 и все последующие имеет место и в случае, когда E — пространство Банаха и $\beta(A)$ конечно.

Бельцкий государственный
педагогический институт

Поступило
15 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Рисс, Усп. матем. наук, в. 1 (1936). [2] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., **7**, № 3 (1943). [3] М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Матем. сборн., **30** (72): 1 (1952). [4] И. Ц. Гохберг, там же, **33** (75):1 (1953). [5] И. Ц. Гохберг, ДАН, **78**, № 4 (1951). [6] В. А. Андрунакиевич, Уч. зап. Кишиневск. гос. унив., **5**, вып. физ.-матем. (1953). [7] М. А. Гольдман, С. Н. Крачковский, ДАН, **86**, № 1 (1952). [8] С. Н. Крачковский, ДАН, **88**, № 2 (1953). [9] С. Н. Крачковский, ДАН, **91**, № 5 (1953). [10] И. Ц. Гохберг, ДАН, **76**, № 4 (1951).