Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 1

МАТЕМАТИКА

Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 1 XII 1954)

Пусть $f(p)$ гармонична в каждой внутренней точке замкнутого множества F, лежащего в трехмерном евклидовом пространстве, и непрерывна на F. Через $E_n(f, F)$ обозначим нижнюю грань чисел $\max\limits_{p\in F}|f(p)-Q_n(p)|$ по всевозможным гармоническим полиномам $Q_n(p)$ степени n, т. е. таким полиномам n-й степени от трех переменных, которые удовлетворяют уравнению Лапласа. $E_n(f, F)$ называется наилучшим приближением функции $f(p)$ гармоническими полиномами степени n на множестве F.

В настоящей заметке даются оценки сверху для $E_n(f, F)$ при различных предположениях относительно $f(p)$ и F.

Теорема 1. Пусть G — *область со связным дополнением, лежащая в шаре единичного радиуса* $(x^2+y^2+z^2\leqslant 1)$; F — *произвольное замкнутое множество, содержащееся строго внутри* G. *Предположим, что любую точку* $p\in\overline{G}-G$ *можно так соединить жордановой спрямляемой кривой* L *длины* $\leqslant l_0$ *с некоторой точкой* p', *принадлежащей сфере* $x^2+y^2+z^2=3$, *что шар с центром в любой точке* $q\in L$ *радиуса* $\rho(s)$ *лежит вне* F. *Здесь* s — *длина кривой* L *от точки* p *до точки* q; $\rho(s)$ — *функция, заданная на* $[0, l_0]$ *и обладающая свойствами:* $0<\rho(0)\leqslant\rho(s)\leqslant 1$, $|\rho(s_1)-\rho(s_2)|\leqslant|s_1-s_2|$, $\rho(0)=\rho(\overline{G}-G, F)$.

В таком случае, если $f(p)$ *гармонична в* G *и непрерывна в* $\overline{G}$, *то*

$$E_n(f, F)\leqslant M\left\{\exp\left[-\exp\left(-c_6\int_0^{l_0}\frac{ds}{\rho(s)}\right)\right]\right\}^n,$$

где $M=\max\limits_{p\in\overline{G}}|f(p)|$, c_6 — *абсолютная постоянная.*

Мы скажем, что область D принадлежит классу $H_\alpha(\nu_0, \mu_0)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) до каждой точки $p\in\overline{D}-D$ можно так дотронуться конусом раствора 2α, что та часть этого конуса, которая лежит в ν_0-окрестности точки p, будет находиться вне $\overline{D}$;

б) точку, где ось этого конуса пересекает сферу радиуса ν_0 с центром в точке p, можно так соединить с ∞ гладкой кривой L, что расстояние между L и $\overline{D}$ будет больше μ_0.

Теорема 2. *Предположим, что* $D\in H_\alpha(\nu_0, \mu_0)$, $f(p)$ *гармонична в* D *и непрерывна в* $\overline{D}$. *Через* $\omega(\delta)$ *обозначим модуль непрерывности* $f(p)$ *в области* Ω, *содержащей строго внутри себя область* D. *В таком случае*

$$E_n(f, \overline{D})\leqslant c_{12}\omega\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{c(\alpha)}}\right],$$

где $c(\alpha) \leqslant c_6/\alpha$, $c(\alpha) \to 1$ *при* $\alpha \to \pi/2$, c_{12} *зависит от области* D *и функции* $f(p)$.

Как следствие из теоремы 2 получаем следующий результат:

Пусть граница области D *имеет всюду непрерывно вращающуюся касательную плоскость,* $f(p)$ *гармонична в* D *и непрерывна в* $\overline{D}$.

В таком случае для любого $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $c(\varepsilon)$, *что*

$$E_n(f, \overline{D}) \leqslant c(\varepsilon)\, \omega\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\varepsilon}\right].$$

Здесь $\omega(\delta)$ — *модуль непрерывности* $f(p)$ *в* $\overline{D}$.

Пусть $\varphi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant h)$ — монотонно убывающая вместе со своей производной функция $[\varphi(0) = 0]$. Через K_φ^0 обозначим множество, ограниченное поверхностью, получаемой вращением $\varphi(x)$ вокруг оси x, и плоскостью $x = h$. Пусть K_φ — область, конгруентная K_φ^0. Точку (0,0,0) назовем вершиной K_φ^0, ось x — осью K_φ^0. Через D_φ обозначим звездообразную область, до каждой граничной точки p которой можно так дотронуться вершиной K_φ, что K_φ окажется вне $\overline{D}_\varphi$, а ось K_φ будет расположена на прямой, соединяющей полюс, относительно которого D_φ звездообразна, с точкой p.

Теорема 3. *Пусть* $f(p)$ *гармонична в* D_φ *и непрерывна со своими* p*-ми производными в* $\overline{D}_\varphi$.

Если $\omega(\delta)$ — *мажоранта модулей непрерывности* p*-х производных функции* $f(p)$, *то*

$$E_n(f, \overline{D}_\varphi) \leqslant c_6 \left[\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right]^p \omega\left[\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right];$$

здесь через $\varphi^{-1}(x)$ *обозначена функция, обратная к* $\varphi(x)$.

Основой доказательства является метод вывода полюсов М. В. Келдыша. Этот метод для случая комплексной плоскости изложен в работе (1). Почти без изменений он переносится на случай гармонических функций.

Доказательство теоремы 1. Пусть ρ_0 — расстояние между $\overline{G} - G$ и F. Разбиваем все пространство на кубы, длина ребер которых равна $\rho_0/4$. Из этих кубов можно составить такую область G_1, что $F \subset G_1 \subset G$, расстояние произвольной точки $\overline{G}_1 - G_1$ до $\overline{G} - G$ меньше $\rho_0/2$,

$$\text{площадь } (\overline{G}_1 - G_1) \leqslant \frac{c_1}{\rho_0}. \tag{1}$$

Ясно, что

$$\left|\frac{\partial f(q)}{\partial l}\right| \underset{q \in G_1}{\leqslant} \frac{c_2 M}{\rho_0}. \tag{2}$$

По формуле Грина

$$f(q) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\overline{G}_1 - G_1} \left[f(p) \frac{\partial \frac{1}{r(p,q)}}{\partial n} - \frac{\partial f(p)}{\partial n} \frac{1}{r(p,q)} \right] ds.$$

При помощи метода вывода полюсов можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $p \in \overline{G}_1 - G_1$ найдется такая гармоническая в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < 3$ функция $\mathscr{F}_{\varepsilon, p}(q)$, что

$$\left|\frac{1}{r(p,q)} - \mathscr{F}_{\varepsilon, p}(q)\right| < \varepsilon, \quad q \in F; \tag{3}$$

$$|\mathscr{F}_{\varepsilon, p}(q)| \leqslant \exp\left\{\left[1 + \ln\frac{1}{\rho(0)\,\varepsilon}\right] \exp\left[c_3 \int_0^{l_0} \frac{ds}{\rho(s)}\right]\right\}, \tag{4}$$

когда q принадлежит шару $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2$.

Разложим $\mathscr{F}_{\varepsilon, p}(q)$ в ряд по гармоническим полиномам:

$$\mathscr{F}_{\varepsilon, p}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} R^k Y_k$$

($R < 3$, Y_k — k-я сферическая функция). Используя (4), имеем в шаре $R \leqslant 1$ оценку

$$|r_n| = |\mathscr{F}_{\varepsilon, p} - \sum_{k=0}^{n} R^k Y_k| \leqslant c_4 n \left(\frac{1}{2}\right)^n \exp\left[1 + \ln\frac{1}{\rho(0)\,\varepsilon}\right] \exp\left[c_3 \int_0^{l_0} \frac{ds}{\rho(s)}\right].$$

Потребуем чтобы $|r_n| \leqslant \varepsilon_n$. Легко проверить, что это неравенство будет выполнено, если в качестве ε_n взять

$$\varepsilon_n = \left\{\exp\left[-\exp\left(-c_5 \int_0^{l_0} \frac{ds}{\rho(s)}\right)\right]\right\}^n$$

(c_5 — абсолютная постоянная). Полагая

$$P_{n, p}(q) = \sum_{k=0}^{n} R^k Y_k,$$

имеем

$$\left|\frac{1}{r(p, q)} - P_{n, p}(q)\right| \underset{p \in F}{\leqslant} 2\varepsilon_n. \tag{5}$$

Аналогично для всякой точки $p \in \bar{G}_1 - G_1$ можно выбрать такой гармонический полином $\overline{P}_{n, p}(q)$ степени n, что

$$\left|\frac{\partial \frac{1}{r(p, q)}}{\partial n} - \overline{P}_{n, p}(q)\right| \underset{q \in F}{\leqslant} 2\varepsilon_n. \tag{6}$$

Положим

$$P_n(q) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\bar{G}_1 - G_1} \left[f \overline{P}_{n, p} - \frac{\partial f}{\partial n} P_{n, p}\right] ds.$$

Используя (1), (2), (5), (6), получаем следующую оценку:

$$E_n(f, F) \leqslant \frac{c_5 M}{\rho_0^2} \left\{\exp\left[-\exp\left(-c_4 \int_0^{l_0} \frac{ds}{\rho(s)}\right)\right]\right\}^n. \tag{7}$$

Но очевидно, что

$$E_n(f, F) \leqslant M/2. \tag{8}$$

Учитывая (7) и (8), легко доказать существование такой абсолютной постоянной c_6, что

$$E_n(f, F) \leqslant M\left\{\exp\left[-\exp\left(-c_6 \int_0^{l_0} \frac{ds}{\rho(s)}\right)\right]\right\}^n.$$

Доказательство теоремы 3. Через D_α обозначим область, получающуюся из D_φ растяжением в $(1+\alpha)$ раз относительно полюса. Введем функцию $f_\alpha(p) = f\left(\frac{x}{1+\alpha}, \frac{y}{1+\alpha}, \frac{z}{1+\alpha}\right)$. Ясно, что $f_\alpha(p)$ гармонична в D_α. Используя свойства области D_φ и применяя теорему 1, находим такой гармонический полином $P_{\alpha, n}(p)$ степени n, что

$$|r_{n,\alpha}| = |f_\alpha(p) - P_{n,\alpha}(p)| \leqslant M \exp\left[-n \exp\left(\frac{-c_1}{\varphi(\alpha/2)}\right)\right], \quad p \in D_{\alpha/2},$$

где $M = \max\limits_{p \in D_\varphi} |f(p)|$.

Отсюда

$$\left|\frac{\partial^p r_{n,\alpha}(q)}{\partial l_1, \ldots, \partial l_p}\right| \underset{q \in D_\varphi}{\leqslant} \frac{c_2}{\varphi(\alpha/2)^p} \exp\left[-n \exp\left(-\frac{c_1}{\varphi(\alpha/2)}\right)\right]. \tag{9}$$

Очевидно, что

$$\left|\frac{\partial^p [f_\alpha(q) - f(q)]}{\partial l_1, \ldots, \partial l_p}\right| \underset{q \in D_\varphi}{\leqslant} c_3 \omega(\delta). \tag{10}$$

Значит,

$$\left|\frac{\partial^p [f(q) - P_n(q)]}{\partial l_1 \ldots \partial l_p}\right| \underset{q \in D_\varphi}{\leqslant} c_3 \omega(\delta) + \frac{c_2}{\varphi(\alpha/2)^p} \exp\left[-n \exp\left(-\frac{c_1}{\varphi(\alpha/2)}\right)\right]. \tag{11}$$

Неравенство (11) справедливо для всех $\alpha > 0$. Полагая в (11) $\alpha = 2\varphi^{-1}(c_4 / \ln n)$, получаем

$$\left|\frac{\partial^p [f(q) - P_n(q)]}{\partial l_1 \ldots \partial l_p}\right| \underset{q \in D_\varphi}{\leqslant} c_5 \omega\left[\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right]. \tag{12}$$

После того как неравенство (12) установлено, справедливость оценки, фигурирующей в условии теоремы 3, устанавливается известным приемом «спуска».

Если в предположениях теоремы 2 потребовать, чтобы функция $f(p)$ имела в Ω непрерывные производные до p-го порядка включительно, то легко показать, что $E_n(f, \overline{D}) \leqslant c_{13}\left(\frac{1}{n}\right)^{pc(\alpha)} \omega\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{c(\alpha)}\right]$, где через $\omega(\delta)$ обозначена мажоранта модулей непрерывности p-х производных функции $f(p)$ в Ω.

Утверждения настоящей заметки переносят на случай гармонических функций некоторые результаты работ ([2],[3]) С. Н. Мергеляна.

Все указанные в заметке результаты справедливы и для пространств с числом измерений бо́льшим чем 3. Доказательства проводятся аналогично.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность С. Н. Мергеляну, под руководством которого были получены все изложенные здесь результаты.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Мергелян, Усп. матем. наук, 8, в. 4 (56) (1953). [2] С. Н. Мергелян, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 37, 17—19; 43—49 (1951). [3] С. Н. Мергелян, ДАН, 91, № 6 (1953).